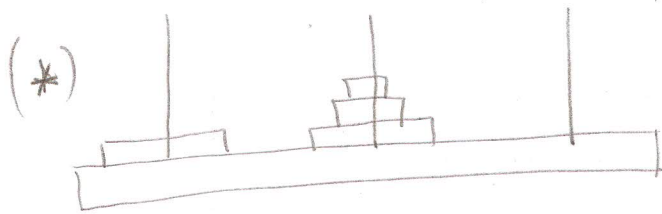


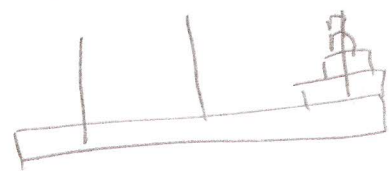
P1] tenemos



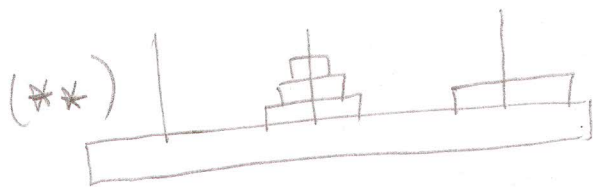
Como NUNCA podemos tener un grande sobre un chico necesariamente tengo que lograr esta situación



y así



(***)



es decir para mover " $n+1$ " tengo que mover " n " discos a la segunda mover el " $n+1$ " a la tercera y luego volver a mover los " n " a la tercera

si llamamos $P(n+1)$ a la cantidad de movimientos necesarios para mover $n+1$ discos tenemos

$$P(n+1) = \underset{\substack{\uparrow \\ (*)}}{P(n)} + \underset{\substack{\uparrow \\ (**)}}{1} + \underset{\substack{\uparrow \\ (***)}}{P(n)}$$

$$P(n+1) = 2P(n) + 1$$

ESTO ES LO QUE LLAMAMOS
UNA SUCESIÓN RECURRENTE
CUANDO MI ESTADO DEPENDE
DEL ANTERIOR

POR EJEMPLO si $P(n) = 6$

$$\Rightarrow P(n+1) = 13$$

$$\Rightarrow P(n+2) = 27$$

$$\Rightarrow P(n+3) = 55$$

$$\Rightarrow P(n+100) = ?$$

NO ME DIGAS QUE TENGO QUE
CALCULAR TODOS LOS $P(n+4), \dots, P(n+99)$
LA VERDAD ES QUE ESA ES
UNA OPCIÓN, LA OTRA ES
APRENDER QUE TODA SUCESIÓN
RECURRENTE PUEDES ESCRIBIRLA
COMO UNA SUCESIÓN NO RECURRENTE
(ESTO LO ESTUDIARÁN MÁS EN CÁLCULO)

así siempre
fórmula recurrente = fórmula no
recurrente.

EN ESTE CASO QUEREMOS VER QUE

$$P(n) = 2^n - 1$$

¿Y cómo se me HIBA A OCURRIR eso? TRANQUILO EN ESTE CURSO SIEMPRE TE DARAN LA FÓRMULA, LO QUE NOSOTROS HAREMOS ES DEMOSTRAR QUE EFECTIVAMENTE SON LO MISMO Y PARA ELLO USAMOS INDUCCIÓN (LA RESPUESTA A LA PREGUNTA RECIÉN COMIENZA, LO OTRO FUE INTRODUCCIÓN FREAK).

PDR: $P(n) = 2^n - 1$

CASO BASE: $P(0) = 2^0 - 1 = 1 - 1 = 0 //$
esto es VERDAD PUES PARA MOVER 0 DISCOS DEBO HACER 0 MOVIMIENTOS.

HI: $P(n) = 2^n - 1$

UNO ASUME QUE SE CUMPLE PARA n , Y VE QUE PASA PARA $n+1$

Pero sabemos que

$$\begin{aligned} P(n+1) &= 2P(n) + 1 \\ &= 2(2^n - 1) + 1 \\ &= 2 \cdot 2^n - 2 + 1 \\ &= 2^{n+1} - 2 + 1 \\ &= 2^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

uno usa la H.I.

∴ se cumple para el caso base,
y cada vez que se cumple
para un "n" se cumple
para "n+1".

∴ se tiene $\forall n \in \mathbb{N}$.

Esto es el PPO de Inducción.

P2) PDQ: $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ es múltiplo de 13

CB: $n=0$, $4^{2 \cdot 0 + 1} + 3^{0+2} = 4 + 9 = 13 = 13 \cdot 1$

HI: $4^{2n+1} + 3^{n+2} = 13 K$ con $K \in \mathbb{Z}$

(recuerda que a es múltiplo de b si b multiplicado por un entero da a , por ej -21 es múltiplo de 7 pues $7 \cdot -3 = -21$)

PDQ: $4^{2(n+1)+1} + 3^{(n+1)+2} = 13 H$, $H \in \mathbb{Z}$

LOS PROBLEMAS POR INDUCCIÓN SON TODOS IGUALES: TOMAR

LO QUE HAY QUE DEMOSTRAR, MATRAQUEAR, Y USAR MÁGIA PARA HACER APARECER LA HI.

TRUCO TÍPICO, TEOREMA:

NIKITA-NIPONE: $x + -x = 0$ $\left(\begin{array}{l} \text{NN} \\ \text{para los} \\ \text{amigos} \end{array} \right)$
 $\Rightarrow a + x + -x = a$

$$4^{2(n+1)+1} + 3^{(n+1)+2}$$

$$= 4^{2n+2+1} + 3^{n+1+2}$$

$$= 4^{2n+3} + 3^{n+3}$$

mmm... mi HI es $4^{2n+1} + 3^{n+2}$
 como que el exponente es casi igual

$$= 4^{2n+1+2} + 3^{n+3}$$

$$= 4^{2n+1} \cdot 4^2 + 3^{n+3}$$

$$= 16 (4^{2n+1}) + 3^{n+3}$$

mmm... EL EXPONENTE YA ES IGUAL!

AHORA SOLO HAY QUE ARREGLAR

EL DEL 3! NO!

YO NECESITO QUE 3^{n+2} ESTÉ
 SUMANDO AL 4^{2n+1} NO A $16(4^{2n+1})$

Y AHORA ES CUANDO USAMOS NN.

$$= 16 (4^{2n+1} + 3^{n+2} - 3^{n+2}) + 3^{n+3}$$

$$= 16 (4^{2n+1} + 3^{n+2}) - 16 \cdot 3^{n+2} + 3^{n+3}$$

Y AHORA SI TENEMOS LA HZ !

$$= 16 \cdot 13K - 16 \cdot 3^n \cdot 9 + 3^n \cdot 27$$

$$= 16 \cdot 13K - 3^n (16 \cdot 9 - 27)$$

$$= 16 \cdot 13K - 3^n \cdot 9 \cdot 13$$

$$= 13 (16 \cdot 3K - 9 \cdot 3^n)$$

figurate que por muy feo
que sea eso son ENTEROS!
y álgebra de ENTEROS DA ENTERO

$$= 13H //$$

OTRA FORMA

Si $NO_{13+3} \in$

GUSTA EL NN

$$16 (4^{2n+1}) + 3^{n+3} = 16 (4^{2n+1}) + 3 (3^{n+2})$$

$$= 3 \cdot 4^{2n+1} + 3 \cdot 3^{n+2} + 13 \cdot 4^{2n+1} = 3 (4^{2n+1} + 3^{n+2}) + 13 \cdot 4^{2n+1}$$

$$= 3 \cdot 13K + 13 \cdot 4^{2n+1} = 13H //$$

P3 CB: $n=2$ (¿Porqué? porque lo que quieres demostrar es $\forall n \geq 1$)

$$\sum_{i=1}^1 F_i = F_1 = F_{1+2} - 1 = F_3 - 1$$

¿y quién es F_3 ? $F_3 = F_2 + F_1 = F_2 + 1$

¿y F_2 ? $F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1$
 $\Rightarrow F_3 = 2$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^1 F_i = F_1 = 1 = F_3 - 1 = 2 - 1 \quad \checkmark$$

HI: $\sum_{i=1}^n F_i = F_{n+2} - 1$

PDQ: $\sum_{i=1}^{n+1} F_i = F_{n+3} - 1$

$$\sum_{i=1}^{n+1} F_i = \underbrace{F_1 + F_2 + \dots + F_n}_{\sum_{i=1}^n F_i} + F_{n+1}$$

$$= \sum_{i=1}^n F_i + F_{n+1}$$

HI $\rightarrow$ $= F_{n+2} - 1 + F_{n+1}$

$$= F_{n+2} + F_{n+1} - 1$$

$$= F_{n+3} - 1 \quad \checkmark \quad \text{p.o.} \quad \sum_{i=1}^{n+1} F_i = F_{n+3} - 1 \quad \forall n \geq 1$$

$$\text{PDQ } F_n > \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}, \forall n \geq 6$$

$$\text{CB: } n=6$$

$$F_6 = 18 > \left(\frac{3}{2}\right)^5 \sim 7,5 //$$

$$\text{HI: } F_n > \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \quad n \geq 6$$

$$\text{PDQ } F_{n+1} > \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

$$F_n > \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \quad \text{OJO! la inducción}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{n-1} > \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{normal!} \text{ SOLO} \\ \text{PERMITE ASUMIR} \\ \text{PARA EL ANTERIOR} \end{array}$$

PERO PARA ESO ESTÁ LA
INDUCCIÓN FUERTE
UNO ASUME QUE SE
CUMPLE PARA TODOS LOS
ANTERIORES.

ENUNCIOS LA REAL HIZO ES

$$F_{n_0} > \left(\frac{3}{2}\right)^{n_0-1} \quad \forall n_0 < n+1$$

Y AHORA SI' $F_{n-1} > \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}$

$$\Rightarrow F_{n+1} = F_n + F_{n-1} > \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \quad (\text{POR HI})$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^n \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{9} \right)$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^n \left(\frac{10}{9} \right)$$

$$\wedge \frac{10}{9} > \frac{4}{3}$$

$$> \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$\Rightarrow F_{n+1} > \left(\frac{3}{2}\right)^n //$$

$$\therefore F_n > \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \quad \forall n \geq 6 //$$

P4

PDQ:
$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k (2k+1) = 2n$$

CB: $n=1$

$$\sum_{k=1}^2 (-1)^k (2k+1)$$

$$= (-1)^1 (2 \cdot 1 + 1) + (-1)^2 (2 \cdot 2 + 1)$$

$$= -1(3) + 1(5) = 2 = 2 \cdot 1 \quad \checkmark$$

HI:
$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k (2k+1) = 2n$$

PDQ
$$\sum_{k=1}^{2(n+1)} (-1)^k (2k+1) = 2(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{2(n+1)} (-1)^k (2k+1) = \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k (2k+1)$$

$$= (-1)^1 (2 \cdot 1 + 1) + \dots + (-1)^{2n} (2 \cdot 2n + 1) + (-1)^{2n+1} (2 \cdot (2n+1) + 1) + (-1)^{2n+2} (2 \cdot (2n+2) + 1)$$

Pero $*$ $= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k (2k+1)$

Por lo tanto lo de antes

$$= \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k (2k+1) + (-1)^{2n+1} (2(2n+1)+1) + (-1)^{2n+2} (2(2n+2)+1)$$

HI

$$= 2n + (-1)^{2n+1} (2(2n+1)+1) + (-1)^{2n+2} (2(2n+2)+1)$$

Notemos que $2n+1$ es impar!
 y que $2n+2$ es par!

$$\Rightarrow (-1)^{2n+1} = (-1) \quad \wedge \quad (-1)^{2n+2} = (1)$$

$$= 2n - (2(2n+1)+1) + (2(2n+2)+1)$$

$$= 2n - (4n+3) + (4n+5)$$

$$= 2n - \cancel{4n} - 3 + \cancel{4n} + 5$$

$$= 2n + 2$$

$$= 2(n+1) //$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k (2k+1) = 2n \quad \forall n \geq 1 //$$

PS

$$i. (1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

CB $n=0$

$$(1+x)^0 = 1 \geq 1+0x = 1 \quad \checkmark //$$

HJ $(1+x)^n \geq 1+nx$

PDR: $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n (1+x) \quad (\text{HI})$$

$$\geq (1+nx)(1+x) \quad \blacktriangle$$

$$= 1+nx + x + nx^2$$

$$= 1+x(n+1) + \underbrace{nx^2}_{\text{ALGO POSITIVO!}}$$

$$\geq 1+x(n+1) //$$

$$\therefore (1+x)^n \geq 1+nx //$$

¡OJO! $\blacktriangle$ ES VERDAD SOLO PORQUE $x \geq -1 \Rightarrow x+1 \geq 0$
 CUANDO TENGO DESIGUALDADES POSITIVAS SE PUEDEN MULTIPLICAR Y SE MANTIENE LA DESIGUALDAD.