P1 P.D.Q: $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia

$\iff \mathcal{R}$ es refleja, simétrica y transitiva.

- P.D.Q: $\mathcal{R}$ es refleja

$\iff (x,y)\mathcal{R}(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\setminus\{0\}$

$(x,y)\mathcal{R}(x,y) \iff xy = xy$

ya que se cumple que $xy = xy \quad \forall (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\setminus\{0\}$,

$\mathcal{R}$ es refleja.

- P.D.Q $\mathcal{R}$ es simétrica

$\iff (x,y)\mathcal{R}(w,z) \Rightarrow (w,z)\mathcal{R}(x,y) \qquad \forall (x,y)(w,z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}\setminus\{0\}$

En efecto: $(x,y)\mathcal{R}(w,z)$

$\iff xz = yw$

$\iff yw = xz$

$\iff wy = zx$

$\iff (w,z)\mathcal{R}(x,y)$

$\therefore (x,y)\mathcal{R}(w,z) \iff (w,z)\mathcal{R}(x,y)$

En particular

$(x,y)\mathcal{R}(w,z) \Rightarrow (w,z)\mathcal{R}(x,y)$

$\therefore$ $\mathcal{R}$ es simétrica.

- P.D.Q $\mathcal{R}$ es transitiva

$\iff [(x,y)\mathcal{R}(w,z) \wedge (w,z)\mathcal{R}(u,v)] \Rightarrow (x,y)\mathcal{R}(u,v)$

En efecto:

$(x,y)\mathcal{R}(w,z) \iff xz = yw$

$\Rightarrow \frac{w}{z} = \frac{x}{y}$ * es posible porque $z,y \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

$(w,z)\mathcal{R}(u,v) \iff wv = zu$

$\Rightarrow \frac{w}{z} = \frac{u}{v}$ * es posible porque $z,v \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{w}{z} = \frac{u}{v} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{u}{v} \Rightarrow xv = uy$

$\iff (x,y)\mathcal{R}(u,v)$.

$\therefore [(x,y)\mathcal{R}(w,z) \wedge (w,z)\mathcal{R}(u,v)] \Rightarrow (x,y)\mathcal{R}(u,v)$

$\therefore$ $\mathcal{R}$ es transitiva.

ya que $\mathcal{R}$ es refleja, simétrica y transitiva, podemos concluir que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia

Sólo falta encontrar $[(0,2)]_R$, es decir $\{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \setminus \{0\} : (0,2) R (x,y)\}$

En efecto: $(0,2) R (x,y) \iff 0 \cdot y = 2x$

$\iff 0 = 2x \implies x = 0$

$\therefore [(0,2)]_R = \{(0,y) : y \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$.

P2 a) P.D.Q: R es una relación de orden
$\iff$ R es refleja, antisimétrica y transitiva

- P.D.Q: R es refleja.

$\iff (x,y) R (x,y) \quad \forall (x,y) \in E_1 \times E_2$

En efecto:

$(x,y) R (x,y) \iff [x R_1 x \wedge y R_2 y]$

ya que R_1 y R_2 son relaciones de orden, son refleja y por lo tanto se cumple que $x R_1 x \quad \forall x \in E_1$ y $y R_2 y \quad \forall y \in E_2$.

$\therefore (x,y) R (x,y)$, es decir, R es refleja.

- P.D.Q: R es antisimétrica

$\iff [(x,y) R (w,z) \wedge (w,z) R (x,y)] \implies (x,y) = (w,z) \quad \forall (x,y), (w,z) \in E_1 \times E_2$.

En efecto:

$(x,y) R (w,z) \iff [x R_1 w \wedge y R_2 z]$

$(w,z) R (x,y) \iff [w R_1 x \wedge z R_2 y]$

Pero $x R_1 w \wedge w R_1 x \implies x = w$ (porque R_1 es de orden)

y $y R_2 z \wedge z R_2 y \implies y = z$ (porque R_2 es de orden).

$\implies (x,y) = (w,z)$

$\therefore [(x,y) R (w,z) \wedge (w,z) R (x,y)] \implies (x,y) = (w,z)$, es decir, R es antisimétrica.

• P.D.Q: R es transitiva

$\iff [(x,y) R (w,z) \wedge (w,z) R (v,v)] \Rightarrow (x,y) R (v,v) \quad \forall (x,y),(w,z),(v,v) \in E_1 \times E_2.$

En efecto:

$(x,y) R (w,z) \iff [x R_1 w \wedge y R_2 z]$

$(w,z) R (v,v) \iff [w R_1 v \wedge z R_2 v]$

Pero $x R_1 w \wedge w R_1 v \Rightarrow x R_1 v$ (pq' R_1 es de orden)

y $y R_2 z \wedge z R_2 v \Rightarrow y R_2 v$ (pq' R_2 es de orden)

$\Rightarrow (x R_1 v \wedge y R_2 v) \iff (x,y) R (v,v)$

$\therefore [(x,y) R (w,z) \wedge (w,z) R (v,v)] \Rightarrow (x,y) R (v,v)$, es decir, R es transitiva.

Ya que R es refleja, antisimétrica y transitiva, podemos concluir que R es una relación de orden.

P2 b) PDQ R es de orden PARCIAL

NOTEMOS PRIMERO QUE YO SOLO SE QUE R_1 y R_2 SON DE ORDEN
NO SE SI SON TOTALES O NO.

Caso 1: R_1 y R_2 PARCIALES.

$\Rightarrow \exists\, x, y \in E_1$ TQ $\sim(x R_1 y \lor y R_1 x)$
$\exists\, a, b \in E_2$ TQ $\sim(a R_2 b \lor b R_2 a)$

¿Qué pasa con $(x,a) R (y,b)$?

$(x,a) R (y,b) \Leftrightarrow x R_1 y \land a R_2 b$
PERO NINGUNO SE CUMPLE!

$(y,b) R (x,a) \Leftrightarrow y R_1 x \land b R_2 a$
NUEVAMENTE NINGUNO SE CUMPLE!

ENTONCES ENCONTRE 2 ELEMENTOS QUE NO SE RELACIONAN, ES DECIR ORDEN PARCIAL.

CASO 2: R_1 PARCIAL, R_2 TOTAL

COMO R_1 PARCIAL $\Rightarrow \exists x, y \in E_1$
TQ $\sim(x R_1 y \vee y R_1 x)$

Luego basta tomar (x,a) y (y,b)

$\Rightarrow (x,a) R (y,b) \wedge (y,b) R (x,a)$
AMBOS NO SE CUMPLEN
POR EL MISMO ARGUMENTO
QUE EN EL CASO 1.

CASO 3: Análogo (R_1 TOTAL, R_2 PARCIAL)

CASO 4: (CAS DIFÍCIL) R_1 y R_2 TOTAL

b) P.D.Q R es de orden PARCIAL.

$\iff \exists (x,y)(w,z) \in E_1 \times E_2$ tal que $\sim((x,y)R(w,z) \vee (w,z)R(x,y))$.

ya que existen al menos 2 elementos distintos en E_1, podemos tomar $x, w \in E_1$ con $x \neq w$ tal que xR_1w y $\sim(wR_1x)$. Esto porque, ya que R_1 es antisimétrica (pq es de orden), si se cumpliera que $xR_1w \wedge wR_1x$, entonces necesariamente $x=w$ y nosotros estamos tomando $x \neq w$.

Bajo el mismo razonamiento, podemos tomar $y, z \in E_2$ tal que $\sim(yR_2z)$ y zR_2y.

Veamos ahora que no se cumple $(x,y)R(w,z)$ ni $(w,z)R(x,y)$.

$(x,y)R(w,z) \iff xR_1w \wedge yR_2z \iff V \wedge F \iff F$

$(w,z)R(x,y) \iff wR_1x \wedge zR_2y \iff F \wedge V \iff F$

$\therefore \exists (x,y),(w,z) \in E_1 \times E_2$ tal que $\sim((x,y)R(w,z) \vee (w,z)R(x,y))$, es decir, R es de orden parcial.

L4

P3 a) i. P.D.Q: Ψ es una relación de orden

- P.D.Q Ψ es refleja

$\iff x\Psi x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

En efecto: $x\Psi x \iff (x-x) \in \mathbb{N}$

$x-x = 0 \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow x\Psi x$

$\therefore$ Ψ es refleja

- P.D.Q: Ψ es antisimétrica

$\iff [x\Psi y \wedge y\Psi x] \Rightarrow x=y \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}$

En efecto:

$x\Psi y \iff \underbrace{(y-x)}_{a} \in \mathbb{N} \quad \wedge \quad y\Psi x \iff \underbrace{(x-y)}_{-a} \in \mathbb{N}$

Pero entonces tenemos que a y $-a$ son naturales. La única forma de que esto pase es $a=0 \iff y-x=0 \iff y=x$

$\therefore$ Ψ es antisimétrica

- P.D.Q: Ψ es transitiva

$\iff (x\Psi y \wedge y\Psi z) \Rightarrow x\Psi z$

En efecto: $x\Psi y \iff (y-x) \in \mathbb{N} \quad \wedge \quad y\Psi z \iff (z-y) \in \mathbb{N}$

Si $(y-x) \in \mathbb{N} \wedge (z-y) \in \mathbb{N}$, entonces $(y-x)+(z-y) \in \mathbb{N}$

$\iff (z-x) \in \mathbb{N} \iff x\Psi z$

$\therefore$ Ψ es transitiva.

Ya que Ψ es refleja, antisimétrica y transitiva, podemos concluir que Ψ es una relación de orden.

ii. Ψ es una relación de orden parcial ya que no se cumple que

$\forall x,y \in \mathbb{R} \quad xRy \;\vee\; yRx$

Basta tomar $x = 1{,}2 \quad y = 3{,}1$

$xRy \iff (y-x) \in \mathbb{N}$ pero $3{,}1 - 1{,}2 = 1{,}9 \notin \mathbb{N}$

$yRx \iff (x-y) \in \mathbb{N}$ pero $1{,}2 - 3{,}1 = -1{,}9 \notin \mathbb{N}$.

b) i. P.D.Q Φ es una relación de equivalencia

• P.D.Q Φ es refleja y transitiva

ya que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, de (a) i. podemos concluir que Φ es refleja y transitiva.

• P.D.Q Φ es simétrica

$\iff \forall x,y \in \mathbb{R} \quad xRy \Rightarrow yRx$

En efecto: $xRy \iff \underbrace{(y-x)}_{a} \in \mathbb{Z}$

si $a \in \mathbb{Z}$, $-a \in \mathbb{Z} \iff -(y-x) \in \mathbb{Z} \iff (x-y) \in \mathbb{Z} \iff yRx$

$\therefore$ Φ es simétrica.

ya que Φ es refleja, simétrica y transitiva, podemos concluir que Φ es una relación de equivalencia.

ii. $[p]_{\Phi} = \{ x \in \mathbb{R} : pRx \}$

$pRx \iff (x-p) \in \mathbb{Z}$

$\iff x - p = K \quad \forall K \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x = p + K$ pero como $p, K \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x \in \mathbb{Z}$

$\therefore [p]_{\Phi} = \{ x \in \mathbb{Z} \}$

P4 a) P.D.Q: R_K es refleja y transitiva

- P.D.Q: R_K es refleja

$\iff A R_K A \quad \forall A \in P(E)$

En efecto: $A R_K A \iff A \cap K \subseteq A$

$A \cap K \subseteq A \quad \forall K \in P(E)$

$\therefore R_K$ es refleja

- P.D.Q: R_K es transitiva

$\iff [A R_K B \wedge B R_K C] \Rightarrow A R_K C \quad \forall A, B, C \in P(E)$

En efecto:

$A R_K B \iff B \cap K \subseteq A \quad \wedge \quad B R_K C \iff C \cap K \subseteq B$

Ahora $C \cap K \subseteq B \Rightarrow C \cap K \subseteq B \cap K \subseteq A \Rightarrow C \cap K \subseteq A \iff A R_K C$

$\therefore R_K$ es transitiva $\forall A, B, C \in P(E)$.

b) Para que R_K sea una relación de orden, solo falta ver que es antisimétrica. 7

$\Leftrightarrow \quad [A R_K B \wedge B R_K A] \Rightarrow A = B$

$\Leftrightarrow \quad [B \cap K \subseteq A \wedge A \cap K \subseteq B] \Rightarrow A = B$

Podemos tomar $\boxed{K = U}$ (universo)

con lo que
$$\left.\begin{array}{lll} B \cap U \subseteq A & \Rightarrow & B \subseteq A \\ A \cap U \subseteq B & \Rightarrow & A \subseteq B \end{array}\right\} \Rightarrow A = B$$