Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Álgebra 08-1

Control 2

P1. Sea $f : [0,1) \to [0,1)$ una función definida en cada $x \in [0,1)$ por

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ 2x - 1 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases}$$

(a) (3 ptos.) Verificar si f es sobreyectiva o inyectiva. Justifique su respuesta con una demostración.

(b) (3 ptos.) Sea $I = [a,b] \subseteq [0,1)$. Probar que $f^{-1}(I) = \left[\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right] \cup \left[\frac{a}{2} + \frac{1}{2}, \frac{b}{2} + \frac{1}{2}\right]$.

P2. Considere el conjunto $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es biyectiva}\}$, es decir, el conjunto de todas las funciones biyectivas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Se define la función $\Psi : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ dada por

$$\Psi(f,g) = (f \circ g)^{-1}$$

(i) (1 pto.) Justifique por qué $\forall (f,g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$, $\Psi(f,g) \in \mathcal{F}$.

(ii) (2 ptos.) Pruebe que Ψ es sobreyectiva, pero **no** inyectiva.

(iii) (1,5 ptos.) Demuestre que, para todo par $(f,g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$,

$$\Psi\left(\Psi(f,g), \Psi(g^{-1}, f^{-1})\right) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}.$$

(iv) (1,5 ptos.) Sean $f_1, g_1, f_2, g_2 \in \mathcal{F}$ definidas por $f_1(x) = 2x + 3$, $g_1(x) = x^3$, $f_2(x) = 5x^3 + 4$, $g_1(x) = \frac{x}{2}$. Además considere el conjunto $A = \{(f_1, g_1), (f_2, g_2)\}$. Encuentre $\Psi(A)$.

12 de abril de 2008
Sin consultas
Tiempo: 1:15