Pauta Control 2

P1. $\mathcal{U} \neq \phi$, $f : P(\mathcal{U}) \times P(\mathcal{U}) \to P(\mathcal{U})$ con $f(X,Y) = X \cup Y, (X,Y) \in P(\mathcal{U}) \times P(\mathcal{U})$

i) Calcular $f^{-1}(\{\phi\})$ (Preimagen de $\{\phi\}$).
Es preciso encontrar los pares $(X,Y) \in P(\mathcal{U}) \times P(\mathcal{U})$ tales que $f(X,Y) = X \cup Y = \phi$.
Es inmediato que el único par posible es (ϕ,ϕ) pués $f(\phi,\phi) = \phi \cup \phi = \phi$.
Sigue que $f^{-1}(\{\phi\}) = \{(\phi,\phi)\}$. (1.0 puntos)

ii) Demuestre que $f^{-1}(\{\mathcal{U}\}) = \{(X,Y) \in P^2(\mathcal{U}) / X^c \subseteq Y\}$
Sea $(X,Y) \in \{(X,Y) \in P^2(\mathcal{U}) / X^c \subseteq Y\}$ entonces $X^c \subseteq Y \Rightarrow X \cup X^c \subseteq X \cup Y$
$\Leftrightarrow \mathcal{U} \subseteq X \cup Y$ y como $X \cup Y \subseteq \mathcal{U} \Rightarrow X \cup Y = \mathcal{U}$, es decir $f(X,Y) = \mathcal{U}$
$\Rightarrow (X,Y) \in f^{-1}(\{\mathcal{U}\})$ de donde $\{(X,Y) \in P^2(\mathcal{U}) / X^c\} \subseteq f^{-1}(\{\mathcal{U}\})$ (1.0 puntos)

Para la otra inclusión, sea $(X,Y) \in f^{-1}(\{\mathcal{U}\}) \Leftrightarrow f(X,Y) \in \{\mathcal{U}\}$
$\Leftrightarrow f(X,Y) = \mathcal{U} \Leftrightarrow X \cup Y = \mathcal{U} \Leftrightarrow X^c \cap Y^c = \mathcal{U}^c = \phi$
$\Rightarrow X^c \subseteq Y$, es decir $(X,Y) \in \{(X,Y) \in \{P(\mathcal{U}) / X^c \subseteq Y\}$
Asi, $f^{-1}(\{\mathcal{U}\}) \subseteq \{(X,Y) \in P(\mathcal{U}) / X^c \subseteq Y\}$ (1.0 puntos)

Se concluye que $f^{-1}(\{\mathcal{U}\}) = \{(X,Y) \in P^2(\mathcal{U}) / X^c \subseteq Y\}$

iii) Demuestre que f es sobreyectiva.

Por demostrar que $(\forall X \in P(\mathcal{U}))(\exists (Y,Z) \in P^2(\mathcal{U}))$ tal que $f(Y,Z) = X$. (1.5 puntos)

Basta tomar $(Y,Z) = (\phi, X) \in P^2(\mathcal{U})$ con lo cual $f(\phi, X) = \phi \cup X = X$.

iv) Inyectividad: Es fácil ver que, por ejemplo, los pares (X, X^c) e (Y, Y^c) que son distintos, tienen la misma imagen:
$f(x, x^c) = f(Y, Y^c) = X \cup X^c = Y \cup Y^c = \mathcal{U}$. (1.5 puntos)

Sigue que f no es inyectiva y por lo tanto no es biyectiva.

P2.

a) Sea $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} / (\exists a \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax^2\}$. Se define $\varphi : F \to \mathbb{R}$ por $\forall f \in F$, $\varphi(f) = f(2)$.
Demostrar que φ es biyectiva.

i) φ es inyectiva si $(\forall f_1, f_2 \in F)[\varphi(f_1) = \varphi(f_2) \Rightarrow f_1 = f_2]$. Sean $f_1, f_2 \in F$, es decir
$(\exists a_1, a_2 \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})$, $f_1(x) = a_1 x^2$ y $f_2(x) = a_2 x^2$.
Entonces si $\varphi(f_1) = \varphi(f_2) \Leftrightarrow f_1(2) = f_2(2) \Leftrightarrow 4a_1 = 4a_2 \Rightarrow a_1 = a_2 \Rightarrow a_1 x^2 = a_2 x^2$; $\forall x \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow f_1 = f_2$

Sigue que φ es inyectiva. (1.5 puntos)

ii) φ es sobreyectiva si $(\forall b \in \mathbb{R})(\exists f \in F)$; $\varphi(f) = b$

Sea $f(x) = ax^2$, $a \in \mathbb{R}$. Entonces $\varphi(f) = f(2) = 4a$. Para $\varphi(f) = b$ basta que $4a = b$ es decir $a = \frac{1}{4}b$.

Así, bastará tomar $f(x) = \frac{1}{4}bx^2$ para que $\varphi(f) = f(2) = \frac{1}{4}b \cdot 4 = b$.

Sigue que φ es sobreyectiva. Se concluye que φ es biyectiva (1.5 puntos)

b) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $(\forall x \in \mathbb{R})\ g(g(x)) = x^3 + 1$. Demostrar que g es biyectiva.
En efecto, como $h(x) = x^3 + 1$ es biyectiva (puede admitirse sin demostrarlo),
se concluye que $g(g(x)) = (g \circ g)(x)$ es biyectiva. (1.0 puntos)

Segun la propiedad $g \circ f$ es inyectiva $\Rightarrow f$ inyectiva y $g \circ f$ sobreyectiva $\Rightarrow g$ sobreyectiva.
Com o $g \circ f$ es biyectiva $\Rightarrow g \circ g$ es inyectiva y sobreyectiva.
Sigue que $g \circ g$ es inyectiva $\Rightarrow g$ inyectiva
y $g \circ g$ es sobreyectiva $\Rightarrow g$ es sobreyectiva.
Se concluye que g es biyectiva. (2.0 puntos)