Pauta Control 2

P1. Se define $\mathcal{F}$ como el conjunto de todas las funciones sobreyectivas $f : D_{a,b} \subseteq \mathbb{R} \to f(D_{a,b})$ de la forma $f(x) = \frac{ax+b}{bx+a}$ donde a y b son constantes reales no nulas y $D_{a,b}$ es el mayor conjunto donde f está bien definida.

(i) Encuentre $D_{a,b}$

(ii) Encuentre condiciones para a y b de modo que f sea biyectiva.

(iii) Si f es invertible, encuentre f^{-1} y muestre que $f^{-1} \in \mathcal{F}$

Solución:

(i) Es necesario que $bx + a \neq 0$, es decir $x \neq -\frac{a}{b}$, $a, b \neq 0$.
Sigue que $D_{a,b} = \mathbb{R} - \{-\frac{a}{b}\}$ (1.0 puntos).

(ii) Por definición del conjunto F, las funciones f son sobreyectivas.
Falta, entonces, encontrar condiciones para a y b de modo que se cumpla la inyectividad.

(0.5 puntos).

Sean $x_1, x_2 \in D_{a,b}$ tales que

$$f_{(x_1)} = f_{x_2} \Leftrightarrow \frac{ax_1 + b}{bx_1 + a} = \frac{ax_2 + b}{bx_2 + a} \Leftrightarrow abx_1x_2 + a^2x_1 + b^2x_2 + ab = abx_1x_2 + a^2x_2 + b^2x_1 + ab$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2)x_1 + (b^2 - a^2)x_2 = 0 \qquad \Leftrightarrow (a^2 - b^2)(x_1 - x_2) = 0$$

(1.5 puntos).

Sigue que $x_1 - x_2 = 0$, es decir $x_1 = x_2$ y f inyectiva si $a^2 - b^2 \neq 0$ ó $a \neq \pm b$ (1.0 puntos).

(iii) f es invertible, entonces, $\exists f^{-1} : f(D_{a,b}) \to D_{a,b}$ tal que $f \circ f^{-1} = \text{ id}$.
Entonces $(f \circ f)^{-1}(x) = \text{ id }(x) = x \Leftrightarrow f(f^{-1}_{(x)}) = x$ (0.5 puntos).

$$\Leftrightarrow \frac{af^{-1}(x) + b}{bf^{-1}(x) + a} = x \Leftrightarrow af^{-1}(x) + b = bxf^{-1}(x) + ax \qquad \left(x \neq -\frac{a}{b}\right)$$

Sigue que $f^{-1}_{(x)} = \frac{-ax+b}{bx-a}$ (1.0 puntos).

Claramente f^{-1} tiene la forma de las funciones del conjunto $\mathcal{F}$ y las condiciones de inyectividad garantizan que $a \neq \pm b$ de modo que está bien definida y $f^{-1} \in \mathcal{F}$ (0.5 puntos).

P2. Sea $F = \{f : [0,1] \to [0,1] / f \text{ es función }\}$ y $B = \{f[0,1] \to [0,1] / f \text{ es función biyectiva }\}$
Se definen las siguientes funciones:

$$\begin{array}{rl} \Psi : & F \to [0,1] \\ & f \to \Psi(f) = \frac{f(0)+f(1)}{2} \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rl} I : & B \to B \\ & f \to I(f) = f^{-1} \end{array}$$

(i) Demuestre que Ψ está bien definida, es decir, verifique que $(\forall f \in F)\ \Psi(f) \in [0,1]$.

(ii) Estudie Inyectividad y Sobreyectividad de Ψ.

(iii) Pruebe que $I(f \circ g) = I(g) \circ I(f)$.

(iv) Pruebe que I es biyectiva.

(v) Demuestre que $(\Psi \circ I)^{-1}(\{0\}) = \phi$ (Preimagen)

Solución:

(i) Sea $f \in F$, entonces $\Psi(f) = \frac{f(0)+f(1)}{2}$ pero $0 \leq f(0) \leq 1 \wedge 0 \leq f(1) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq f(0)+f(1) \leq 2$
Sigue que $0 \leq \frac{f(0)+f(1)}{2} \leq 1$ entonces $\Psi(f) \in [0,1]$ (1.0 puntos)

(ii) - Ψ no es inyectiva.
Por ejemplo, tomamos $f, g \in F$ tales que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ y $g(0) = 1$; $g(1) = 0$
Así, $\Psi(f) = \Psi(g) = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$ pero $f \neq g$ (0.7 puntos)
- Ψ es sobreyectiva.
Por demostrar que $(\forall c \in [0,1])(\exists f \in F)\ \Psi(f) = c$
En efecto, para $c \in [0,1]$ basta tomar $f(x) = c$ (función constante) de modo que
$\Psi(f) = \frac{f(0)+f(1)}{2} = \frac{c+c}{2} = c$ (0.8 puntos)

(iii) Es inmediato, para funciones biyectivas

$$I(f \circ g) = (f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1} = I(g) \circ I(f)$$

(0.5 puntos)

(iv) I es inyectiva
Sean $f_1, f_2 \in B$ tales que $I(f_1) = I(f_2) \Leftrightarrow f_1^{-1} = f_2^{-1}$
$\Rightarrow f_1 = f_2 \quad \big((f^{-1})^{-1} = f\big)$ (0.7 puntos)
I es sobreyectiva
Por demostrar que $(\forall g \in B)(\exists f \in B) I(f) = g$.
En efecto, $I(f) = g \Rightarrow f^{-1} = g \Rightarrow f = g^{-1} \in B$
Es decir, basta tomar $f = g^{-1}$ (0.8 puntos)

(v) Para $(\Psi \circ I)^{-1}(\{0\})$ debemos encontrar las funciones biyectivas
$f \in B$ tales que $(\Psi \circ I)(f) = 0$ (0.5 puntos)
Sigue que $(\Psi \circ I)(f) = \Psi(I(f)) = \Psi(f^{-1}) = \frac{f^{-1}(0)+f^{-1}(1)}{2} = 0$ con $f^{-1}(0), f^{-1}(0) \in [0,1]$, de donde necesariamente $f^{-1}(0) = f^{-1}(1) = 0$ pero esto es imposible porque f^{-1} es biyectiva y en particular inyectiva.
Sigue que $\forall f \in B\ (\Psi \circ I)(f) \neq 0$
Asi $(\Psi \circ I)^{-1}(\{0\}) = \phi$. (1.0 puntos)