Control 2 ALGEBRA

Pauta Problema 1

Sea $f:[0,1)\to[0,1)$ una función definida en cada $x\in[0,1)$ por:

$$f(x)=\begin{cases}2x & \text{si } x\in[0,\frac{1}{2})\\ 2x-1 & \text{si } x\in[\frac{1}{2},1)\end{cases}$$

a) Verificar si f es sobreyectiva o inyectiva. Justifique.

$\therefore$ f es sobreyectiva, es decir $(\forall y\in[0,1))(\exists x\in[0,1))$; $y=f(x)$.

En efecto, sea $y\in[0,1)$. Basta tomar $x=\frac{y}{2}$ con lo que $0\leq\frac{y}{2}<\frac{1}{2}$, es decir $x\in[0,\frac{1}{2})\subseteq[0,1)$ y tal que

$$f(x)=f\left(\frac{y}{2}\right)=2\,\frac{y}{2}=y \qquad \left(f(x)=2x \text{ en } x\in[0,\tfrac{1}{2})\right)$$

$\longrightarrow$ 1.5

$\therefore$ f NO es inyectiva.

Por ejemplo, sean $x_1=\frac{1}{4}$ y $x_2=\frac{3}{4}$

Así, $x_1\neq x_2$, pero $f(x_1)=2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ pues $x\in[0,\frac{1}{2})$

y $f(x_2)=2\cdot\frac{3}{4}-1=\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$ pues $x\in[\frac{1}{2},1]$

Sigue que $x_1\neq x_2 \wedge f(x_1)=f(x_2)$, es decir, f no es inyectiva

$\longrightarrow$ 1.5

b) Sea $I=[a,b]\subseteq[0,1)$.

Probar que $f^{-1}(I)=\left[\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right]\cup\left[\frac{a}{2}+\frac{1}{2},\frac{b}{2}+\frac{1}{2}\right]$

Como $[a,b]\subseteq[0,1) \Rightarrow \left[\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right]\subseteq[0,\frac{1}{2})$

Así, $\forall x\in\left[\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right]\Rightarrow f(x)=2x \wedge f(x)\in\left[2\frac{a}{2},2\frac{b}{2}\right]\Rightarrow f(x)\in[a,b]$

Sigue que $f^{-1}[a,b]=f^{-1}(I)=\left[\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right]$

$\longrightarrow$ 1.5

Analogamente, $\left[\frac{a}{2}+\frac{1}{2}, \frac{b}{2}+\frac{1}{2}\right] \subseteq \left[\frac{1}{2}, 1\right)$

Assi $\forall x \in \left[\frac{a}{2}+\frac{1}{2}, \frac{b}{2}+\frac{1}{2}\right] \Rightarrow f(x) = 2x-1 \wedge f(x) \in \left[2\left(\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\right)-1, 2\left(\frac{b}{2}+\frac{1}{2}\right)-1\right]$

$$\Rightarrow f(x) \in [a, b]$$

Segue que $f^{-1}[a,b] = f^{-1}(I) = \left[\frac{a}{2}+\frac{1}{2}, \frac{b}{2}+\frac{1}{2}\right]$

Então $f^{-1}(I) \cup f^{-1}(I) = \left[\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right] \cup \left[\frac{a}{2}+\frac{1}{2}, \frac{b}{2}+\frac{1}{2}\right]$, ou seja

$$f^{-1}(I) = \left[\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right] \cup \left[\frac{a}{2}+\frac{1}{2}, \frac{b}{2}+\frac{1}{2}\right]$$

1.5

Control 2 ALGEBRA
Pauta Problema 2

Considere el conjunto $F = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f \text{ es biyectiva} \}$, es decir, el conjunto de todas las funciones biyectivas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.
Se define la función $\Psi : F \times F \longrightarrow F$ dada por $\Psi(f,g) = (f \circ g)^{-1}$

i) Justifique porqué $\forall (f,g) \in F \times F$, $\Psi(f,g) \in F$

f y g son biyecciones, por lo tanto $f \circ g$ es biyectiva y su inversa $(f \circ g)^{-1}$ es también biyectiva.

Así, $\Psi(f,g) = (f \circ g)^{-1}$ es biyectiva, es decir $\Psi(f,g) \in F \longrightarrow$ 1.0

ii) Pruebe que Ψ es sobreyectiva, pero NO inyectiva.

- Ψ sobreyectiva

Se debe probar que $\forall h \in F$, $\exists (f,g) \in F \times F$ tal que $\Psi(f,g) = h$

En efecto, dado $h \in F$, basta tomar $(id_{\mathbb{R}}, h^{-1}) \in F \times F$

con lo cual $\Psi(id_{\mathbb{R}}, h^{-1}) = (id_{\mathbb{R}} \circ h^{-1})^{-1} = (h^{-1})^{-1} = h$

OBSERVAR que el par (f,g) escogido es el par $(id_{\mathbb{R}}, h^{-1}) \in F \times F \longrightarrow$ 1.0

- Ψ NO es inyectiva.

Basta, por ejemplo, encontrar dos o más pares de biyecciones que tengan la misma imagen

Sean $(f, f^{-1}) \in F \times F$ $\wedge$ $(g, g^{-1}) \in F \times F$ con $(f, f^{-1}) \neq (g, g^{-1})$

Sin embargo $\Psi(f, f^{-1}) = (f \circ f^{-1})^{-1} = id_{\mathbb{R}}^{-1} = id_{\mathbb{R}}$

y $\Psi(g, g^{-1}) = (g \circ g^{-1})^{-1} = id_{\mathbb{R}}^{-1} = id_{\mathbb{R}}$. 1.0

Así $(f, f^{-1}) \neq (g, g^{-1})$ pero $\Psi(f, f^{-1}) = \Psi(g, g^{-1})$ y Ψ NO es inyectiva.

OBSERVAR que para probar la sobreyección y la no inyectividad de ψ pueden haber varias otras formas o contraejemplos

iii) Demuestre que, para todo par $(f,g) \in F \times F$,

$$\psi(\psi(f,g), \psi(g^{-1}, f^{-1})) = id_{\mathbb{R}}.$$

En efecto.

$$\psi(\psi(f,g), \psi(g^{-1}, f^{-1})) = [\psi(f,g) \circ \psi(g^{-1}, f^{-1})]^{-1} = [(f \circ g)^{-1} \circ (g^{-1} \circ f^{-1})^{-1}]^{-1}$$

$= (g^{-1} \circ f^{-1}) \circ (f \circ g)$ usando $(s \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ s^{-1}$ $\wedge$ $(s^{-1})^{-1} = s$

$$= \underbrace{g^{-1} \circ (f^{-1} \circ f) \circ g}_{\text{ASOCIANDO}} = g^{-1} \circ id_{\mathbb{R}} \circ g = g^{-1} \circ g = id_{\mathbb{R}} \quad (id_{\mathbb{R}} \circ s = s)$$

1.5

iv) Sean $f_1, g_1, f_2, g_2 \in F$ definidas por $f_1(x) = 2x+3$, $g_1(x) = x^3$, $f_2(x) = 5x^3+4$, $g_2(x) = \frac{x}{2}$. Además considere el conjunto $A = \{(f_1, g_1), (f_2, g_2)\}$. Encuentre $\psi(A)$

Claramente $\psi(A) = \{\psi(f_1, g_1), \psi(f_2, g_2)\}$

$$f_1 \circ g_1 = f_1(g_1) = f_1(x^3) = 2x^3+3 \Rightarrow (f_1 \circ g_1)^{-1} = \sqrt[3]{\frac{x-3}{2}} = \psi(f_1, g_1)$$

$$f_2 \circ g_2 = f_2(g_2) = f_2\left(\frac{x}{2}\right) = 5\,\frac{x^3}{8} + 4 \Rightarrow (f_2 \circ g_2)^{-1} = \sqrt[3]{\frac{8(x-4)}{5}} = \psi(f_2, g_2)$$

Sigue que $\psi(A) = \left\{\sqrt[3]{\frac{x-3}{2}}, 2\sqrt[3]{\frac{x-4}{5}}\right\}$

1.5

OBSERVAR que los cálculos de las inversas pueden considerarse inmediatos por tratarse de biyecciones simples de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.