P1] a) i) Sea $a \in A$. Notemos que, cualquiera sea $y \in B$, $\varphi(a,b) = a$ por lo que φ es sobreyectiva (2,0 ptos)

ii) Notemos que si $B = \{b\}$ entonces todo elemento $y \in B \Rightarrow y = b$. Así, si $(x,y) \in A \times B$ entonces $y = b$. Luego sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ en $A \times B$ tales que

$$\varphi(x_1, y_1) = \varphi(x_2, y_2)$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

y como $y_1, y_2 \in B \Rightarrow y_1 = y_2 = b$

con lo que φ es ~~ob.~~ inyectiva

P1) b) i) Sean a_1, a_2 tales que

$$d(a_1) = d(a_2) \Rightarrow (a_1, a_1) = (a_2, a_2)$$
$$\Rightarrow a_1 = a_2 .$$

por lo que d es inyectiva. (2,0 ptos)

ii) Notamos que los únicos elementos en $A \times A$ que tienen preimagen a través de d son los elementos "de la diagonal". Es decir los $(x, y) \in A \times A$ tales que $x = y$.
Ahora, para asegurar que todo elemento de $A \times A$ tenga preimagen basta con poner $A = \{a\}$. De este modo $A \times A = \{(a, a)\}$

y $d(a) = (a, a)$

lo que hace sobreyectiva a d. (1,0 ptos)

P2) a) Sea $B_1 \subseteq B$ y tomemos

$$x \in f^{-1}(B_1^c) \underset{\text{def } f^{-1}(\cdot)}{\overset{(1{,}0\text{pto})}{\iff}} f(x) \in B_1^c \underset{\text{def complemento}}{\overset{(1{,}0\text{pto})}{\iff}} f(x) \notin B_1$$

$$\underset{\text{def } f^{-1}}{\iff} x \notin f^{-1}(B_1) \iff x \in [f^{-1}(B_1)]^c$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{1{,}0\text{pto.}}$$

b) Sean A, B conjuntos entonces

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c$$
$$= (A^c \cap B^c)^c \cap (A \cap B)^c \quad (1{,}0\text{pto.})$$

Luego

$$f^{-1}(C_1 \triangle C_2) = f^{-1}((C_1^c \cap C_2^c)^c \cap (C_1 \cap C_2)^c)$$

Propiedades (1pto)

$$= f^{-1}((C_1^c \cap C_2^c)^c) \cap f^{-1}((C_1 \cap C_2)^c)$$
$$= [f^{-1}(C_1^c \cap C_2^c)]^c \cap [f^{-1}(C_1 \cap C_2)]^c$$
$$= [f^{-1}(C_1^c) \cap f^{-1}(C_2^c)]^c \cap [f^{-1}(C_1) \cap f^{-1}(C_2)]^c$$

parte a) // $= [\{f^{-1}(C_1)\}^c \cap \{f^{-1}(C_2)\}^c]^c \cap [f^{-1}(C_1) \cap f^{-1}(C_2)]^c$

(1pto) de Morgan // $= [f^{-1}(C_1) \cup f^{-1}(C_2)] \cap [f^{-1}(C_1) \cap f^{-1}(C_2)]^c$

Def $\triangle$ // $= f^{-1}(C_1) \triangle f^{-1}(C_2)$