Introducción al Algebra (2014-01)

Control 2 Pauta Problema 1

a) $A, B \neq \phi$, $\varphi: A \times B \longrightarrow A$; $\varphi(x,y) = x$

i) Dem que φ es sobreyectiva.

En efecto, sea $x \in A$, bastará escoger $(x,y) \in A \times B$ tal que $\varphi(x,y) = x$ por definición de φ

(1.5) Así, $(\forall x \in A)(\exists (x,y) \in A \times B)$ $\varphi(x,y) = x$, es decir φ es sobreyectiva

ii) Dem q' φ es biyectiva $\Longleftrightarrow$ B tiene solo un elemento.

($\Longrightarrow$) Sea φ biyectiva, se probó que es sobreyectiva, pero también es inyectiva, es decir $\forall (x_1,y_1)(x_2,y_2) \in A \times B$ $\left(f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2) \Rightarrow (x_1,y_1) = (x_2,y_2) \right)$

Pero $f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \not\Rightarrow (x_1,y_1) = (x_2,y_2)$ a no ser

(1.5) que $y_1 = y_2$, es decir $\forall y_1, y_2 \in B$, $y_1 = y_2 \Rightarrow B = \{b\}$ $(y_1 = y_2 = b)$

($\Longleftarrow$) $B = \{b\}$, es decir B tiene un solo elemento. Por lo tanto.

$\varphi(x_1,b) = \varphi(x_2,b) \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow (x_1,b) = (x_2,b)$, es decir φ

(1.0) es inyectiva y como es sobreyectiva, es biyectiva.

b) Probaremos las dos inclusiones: $f(E - \bar{X}) \subseteq F - f(\bar{X})$ ($\supseteq$)

($\subseteq$) Sea $y \in f(E - \bar{X})$ entonces $\exists x \in (E - \bar{X})$ tal que $y = f(x)$.

Como f es inyectiva no puede existir $z \in \bar{X}$ tal que $y = f(z)$ pues

si no, $f(z) = f(x) \Rightarrow z = x \rightarrow$!! pues $z \in \bar{X} \wedge x \in (E - \bar{X})$

(1.0) Sigue que $y \notin f(\bar{X})$, es decir $y \in (F - f(\bar{X})) \Rightarrow f(E \setminus \bar{X}) \subseteq F - f(\bar{X})$

($\supseteq$) Recíprocamente sea $y \in (F \setminus f(\bar{X}))$, entonces $y \notin f(\bar{X})$ pero como f es sobreyectiva $\exists x \in E$ tal que $y = f(x)$.

Pero x no puede pertenecer a $\bar{X}$ pues en lo contrario $\overset{y}{f(x)} \in f(\bar{X})$

Así, $x \in (E - \bar{X})$ y por lo tanto $y = f(x) \in f(E \setminus \bar{X})$

(1.0) Así $F - f(\bar{X}) \subseteq f(E - \bar{X})$. Se concluye la igualdad.

Pauta Problema 2

$A, B \neq \phi$, $f: A \to B$, $g: B \to A$, $h: B \to B$ funciones
tales que: h es biyectiva, $f \circ g = h$ $\wedge$ $g \circ f = id_A$

a) muestre que f y g son biyectivas

Como $f \circ g = h$ y h es biyectiva, $f \circ g$ es biyectiva
Tambien $g \circ f = id_A$ y id_A es biyectiva y por lo tanto
(1.5) $g \circ f$ es tambien biyectiva.

Así, por propiedades vistas en clase

(1.0) $f \circ g$ biyectiva $\Rightarrow \begin{cases} f \circ g \text{ inyectiva} \Rightarrow g \text{ inyectiva} \\ f \circ g \text{ sobreyectiva} \Rightarrow f \text{ sobreyectiva.} \end{cases}$

(1.0) $g \circ f$ biyectiva $\Rightarrow \begin{cases} g \circ f \text{ inyectiva} \Rightarrow f \text{ inyectiva} \\ g \circ f \text{ sobreyectiva} \Rightarrow g \text{ sobreyectiva.} \end{cases}$

Se concluye f sobreyectiva $\wedge$ f inyectiva $\Rightarrow$ f biyectiva
(0.5) g inyectiva $\wedge$ g sobreyectiva $\Rightarrow$ g biyectiva

b) muestre que $h = id_B$

Hay varias formas. Todas las funciones son biyectivas y por lo tanto invertibles

Se sabe que $f \circ g = h \Rightarrow g \circ (f \circ g) = g \circ h \xRightarrow{\text{Asociado}} \underbrace{(g \circ f)}_{id_A} \circ g = g \circ h$

$\Rightarrow id_A \circ g = g \circ h \Rightarrow g = g \circ h \Rightarrow g^{-1} \circ (g \circ h) = g^{-1} \circ g$

(2.0) $\Rightarrow (g^{-1} \circ g) \circ h = g^{-1} \circ g \Rightarrow id_B \circ h = id_B \Rightarrow h = id_B$