Introducción al algebra (12-1)

Pauta control 2

Problema 1 $\quad A\cap C=\phi,\ B\cap D=\phi,\ f:A\to B,\ g:C\to D$

Se define $h: A\cup C\to B\cup D$; $\forall x\in A\cup C\quad h(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x\in A\\ g(x) & \text{si } x\in C\end{cases}$

i) Demostrar que si f, g son inyectivas, entonces h es inyectiva.

∴ En efecto: Sean $x_1, x_2\in A\cup C$ tales que $h(x_1)=h(x_2)$

Como $A\cap C=\phi$, $x_1,x_2\in A \vee x_1,x_2\in C \vee x_1\in A\wedge x_2\in C$

Si $x_1,x_2\in A$, $h(x_1)=h(x_2)\Rightarrow f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$ pues f es inyectiva.

(1.0) Si $x_1,x_2\in C$, $h(x_1)=h(x_2)\Rightarrow g(x_1)=g(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$ pues g es inyectiva

Si $x_1\in A\wedge x_2\in C$, $x_1\neq x_2\Rightarrow h(x_1)\neq h(x_2)$ pues $h(x_1)=f(x_1)\in B$ y $h(x_2)=g(x_2)\in D$ y $B\cap D=\phi$

(1.0) Sigue que $(\forall x_1,x_2\in A\cup C)\ h(x_1)=h(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$ ∴ h es inyectiva

ii) Si f y g son sobreyectivas, entonces h es sobreyectiva

∴ En efecto, sea $y\in B\cup D$, por dem. q' $\exists x\in A\cup C$ tal que $h(x)=y$

Pero $y\in B\cup D\Rightarrow y\in B \veebar y\in D$ pues $B\cap D=\phi$

(1.0) Si $y\in B$, $\exists x\in A$ tal que $y=f(x)=h(x)$ pues f es sobreyectiva.

Si $y\in D$, $\exists x\in C$ tal que $y=g(x)=h(x)$ pues g es sobreyectiva.

(1.0) Sigue que $(\forall y\in B\cup D)(\exists x\in A\cup C);\ y=h(x)$ ∴ h es sobreyectiva.

Alternativa

OBSERVACION: Tambien se puede argumentar por imágenes.

$h(A\cup C)=h(A)\cup h(C)$ (propiedad) y $h(A)=f(A)=B$; $h(C)=g(C)=D$ pues f y g son sobreyectivas.

Entonces $h(A\cup C)=B\cup D$, h es sobreyectiva.

iii) Si f y g son biyectivas, demostrar que h es biyectiva y encontrar su inversa.

- Si f y g son biyectivas, f y g son inyectivas y sobreyectivas y por (i) y (ii). h es inyectiva y sobreyectiva y por lo tanto h es biyectiva.

(1.0) → Entonces existe $h^{-1}: B \cup D \to A \cup C$ y debe ser tal que

$$h^{-1} \circ h = id_{A \cup C}$$

En efecto $h^{-1}(x) = \begin{cases} f^{-1}(x) & si\ x \in B \\ g^{-1}(x) & si\ x \in D \end{cases}$ $(B \cap D = \phi)$

(1.0) → pues $h^{-1} \circ h = \begin{cases} f^{-1} \circ f = id_A \\ g^{-1} \circ g = id_C \end{cases} = id_{A \cup C}$ $(A \cap C = \phi)$

Problema 2

$E \neq \phi$, $A \subseteq E$, $A \neq \phi$ $\quad f\ P(E) \longrightarrow P(E)$ $\quad g\ P(E) \longrightarrow P(E)$

$\qquad X \longrightarrow f(X) = X \setminus A \qquad X \longrightarrow g(X) = X \cup A$

i) Demostrar que $f \circ g = f \ \wedge \ g \circ f = g$

En efecto, $f \circ g, f, g, g \circ f : P(E) \longrightarrow P(E)$, es decir todas

(1.0) tienen igual dominio y codominio.

$$(f \circ g)(X) = f(g(X)) = f(X \cup A) = (X \cup A) \setminus A = (X \cup A) \cap A^c$$

(1.0)
$$= (X \cap A^c) \cup (A \cap A^c) = (X \setminus A) \cup \phi = X \setminus A = f(X)$$

$$(g \circ f)(X) = g(f(X)) = g(X \setminus A) = (X \setminus A) \cup A = (X \cap A^c) \cup A$$

(1.0)
$$= (X \cup A) \cap (A^c \cup A) = (X \cup A) \cap E = X \cup A = g(X)$$

ii) Demostrar que $f^{-1}(\{\phi\}) = P(A)$ (Preimagen)

(1.0) En efecto, sea $X \in f^{-1}(\{\phi\}) \Leftrightarrow f(X) \in \{\phi\} \Leftrightarrow f(X) = \phi$

$$\Leftrightarrow \overbrace{X - A}^{f(X)} = \phi \Leftrightarrow X \subseteq A \Leftrightarrow X \in P(A)$$

(0.5) Sigue que $f^{-1}(\{\phi\}) = P(A)$.

iii) Demostrar que $\forall X \in P(E)$, $f(X) \neq A$

Supongamos por contradicción que $\exists X \in P(E)$; $f(X) = A$

(1.5) es decir $X \setminus A = A \Leftrightarrow X \cap A^c = A$ pero $(X \cap A^c) \subseteq A^c$

Entonces $A \subseteq A^c$ lo que es una contradicción, salvo $A = \phi$ pero $A \neq \phi$