Solución y Pauta Control 2, MA110 ALGEBRA
Semestre 2007/1 (31 de Marzo)

P1 i) Sean A, B, C conjuntos. Pruebe que.

$$A \cap B \subseteq C \Rightarrow (A \cap C^c) \subseteq B^c$$

<u>Solución</u>: Una forma es usar la hipótesis y unir con A^c

Así $(A \cap B) \cup A^c \subseteq C \cup A^c \Rightarrow (A \cup A^c) \cap (B \cup A^c) \subseteq C \cup A^c$

Como $A \cup A^c = U$, queda $U \cap (B \cup A^c) \subseteq C \cup A^c$

$$\Rightarrow (B \cup A^c) \subseteq (C \cup A^c) \longrightarrow \boxed{1{,}0 \text{ pto}}$$

Además $B \subseteq B \cup A^c$, entonces, por transitividad

$$B \subseteq (C \cup A^c) \Rightarrow (C \cup A^c)^c \subseteq B^c \quad (\text{Prop Clase})$$

y por ley de Morgan queda $(A \cap C^c) \subseteq B^c \longrightarrow \boxed{1{,}0 \text{ pto}}$

OBSERVACION: Revisar con cuidado, hay varias otras formas

ii) Sean A, B conjuntos. Demuestre que

$$[\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)] \Leftrightarrow (A \subseteq B \vee B \subseteq A)$$

<u>Solución</u>.

$(\Leftarrow)$ Si $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B \Rightarrow \mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(B)$ (1)

además $\underbrace{A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)}_{\text{Propiedad que se acepta.}} \Rightarrow \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(B)$ (2)

de modo que, de (1) y (2) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

$\boxed{2.0 \text{ pts}}$ Análogamente se procede si $B \subseteq A \Rightarrow A \cup B = A$ ... etc.

$(\Longleftarrow)$ Usaremos que $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$.

Como $(A \cup B) \in P(A \cup B) \Leftrightarrow (A \cup B) \in (P(A) \cup P(B))$ (por la igualdad)

$\Leftrightarrow (A \cup B) \in P(A) \vee (A \cup B) \in P(B)$ (Definición de unión)

$\Rightarrow (A \cup B) \subseteq A \vee (A \cup B) \subseteq B \Rightarrow B \subseteq A \vee A \subseteq B$ $\boxed{2.0 \text{ ptos}}$

P2 i) Considere las funciones $f, g : A \to B$ $\quad A, B \neq \phi$

donde f es inyectiva.

Se define $\varphi : A \to A \times B$ como $\varphi(x) = (f(x), g(x))$

Demuestre que φ es inyectiva.

En efecto, sean $x_1, x_2 \in A$ tales que $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$

$\Rightarrow (f(x_1), g(x_1)) = (f(x_2), g(x_2)) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \wedge g(x_1) = g(x_2)$

pero f inyectiva $\Rightarrow x_1 = x_2 \wedge g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$\boxed{2.0 \text{ ptos}}$

OBS: en el último paso usamos $[p \wedge q \Rightarrow p] \Leftrightarrow V$, es decir la conclusión es independiente de la función g.

ii) Sea $U \neq \phi$ un conjunto universo. Se define la función

$f : P(U) \times P(U) \to P(U)$ por $f(X, Y) = X - Y$

Estudie la inyectividad y sobreyectividad de f.

1) Inyectividad $\quad f(X, Y) = X - Y = X \cap Y^c$

Es inmediato que para $X = \phi$, $f(\phi, Y) = \phi \quad \forall Y \in P(U)$

$\boxed{2.0 \text{ ptos}}$ de modo que f no es inyectiva (varios pares con igual imagen)

2) <u>Sobreyectividad</u> $f(X,Y) = X \cap Y^c$

Basta tomar ahora, por ejemplo, $Y = \phi$, es decir $Y^c = \phi^c = U$

de modo que $f(X,\phi) = X \cap U = X \quad \forall X \in P(U)$

$\boxed{2.0 \text{ ptos}}$ Así f recorre todo $P(U)$ y por lo tanto es sobreyectiva.

OBS: Revisar con cuidado, hay varias alternativas de elección