

PAUTA Aux 1 (11)

P1 En la lógica proposicional los conectivos " $\vee$ ", " $\wedge$ ", " $\sim$ " se denominan conectivos fundamentales pues CUALQUIER OTRO CONECTIVO

se puede escribir como una combinación de estas, por ejemplo

" $p \Rightarrow q$ " es equivalente a " $\sim p \vee q$ "

Este tipo de problemas tiene dos formas de enfrentarse

1) hacer tabla de verdad y ponerse en todos los casos

2) tratar de escribir esta cosa rara que me inventaron como una combinación de los conectivos fundamentales

En general la segunda es más difícil pero MUCHISIMA más corta.

Veamos ¿Cómo escribimos $p * q$?

Si te fijas solo es verdadera cuando ambas son falsas, mmm... espera es como el contrario de la tabla del "o"

el "0" es solo falso cuando
ambas son falsas!

$$\Rightarrow \boxed{(P * Q) \Leftrightarrow \sim(P \vee Q)}$$

y ahora veamos que onda lo
que me piden

$$a) (P * P) \Leftrightarrow \sim(P \vee P)$$

¿Yo voy a tu casa o a tu casa?
me tan puro molestando no es
necesario repetiro

$$\sim(P \vee P) \Leftrightarrow \sim P \quad \text{que es lo que me pedian!}$$

ojo! que ESE ARGUMENTO FUNCIONA PARA
ALGUNOS CONECTIVOS, en otras palabras la
tabla del "0" dice $V \vee V = V \wedge F \vee F = F$

por eso $P \vee P \Leftrightarrow P$ da lo mismo si
P es falsa o verdadera, si la junto
consigo misma no cambia el valor

de verdad. De hecho $P * P$ es

un ejemplo en el que NO se cumple

$$\text{que } \underline{P * P \Leftrightarrow P}$$

$$b) (p * q) * (p * q)$$

tranquilidad $p * q$ es una proposición
 y se está juntando consigo misma
 ¿Pero eso me parece conocido?
 sí recién lo hiciste

$$(p * q) * (p * q) \Leftrightarrow \sim (p * q) \Leftrightarrow \sim (\sim (p \vee q))$$

$$\Leftrightarrow p \vee q. \quad \text{II}$$

MORALEJA NO SE TE OLVIDE QUE
 las cosas complicadas siguen siendo
 proposiciones si te marean llámalas
 de otra forma, por ejemplo $p * q = r$

$$\Rightarrow (p * q) * (p * q) \Leftrightarrow r * r \Leftrightarrow \sim r \Leftrightarrow \sim (p * q)$$

$$c) (p * p) * (q * q)$$

$$\Leftrightarrow \sim p * \sim q \Leftrightarrow \sim (\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow p \wedge q \quad \text{II}$$

por de Morgan

● Es muy importante que justifiquen
 todo! y que no se salten ningún
 paso.

PAUTA AUXILIAR 1

P1] Para que un implica ($\Rightarrow$) sea FALSO, la única posibilidad es que se de algo de la forma $V \Rightarrow F$.

ya que nos dicen que la proposición:

$$\underbrace{[(p \Leftrightarrow q) \wedge \overline{r \Rightarrow s} \wedge \bar{t}]}_{(a)} \Rightarrow \underbrace{[\bar{s} \wedge (q \Rightarrow s)]}_{(b)} \text{ es falsa,}$$

necesariamente la parte (a) debe ser verdadera y la parte (b) falsa.

Analicemos la parte (a). Esta, a su vez, está compuesta por 3 partes unidas por $\wedge$ ("y" lógico). Por lo tanto, para que (a) sea verdadero, las 3 partes deben serlo. Entonces tenemos que:

(i) $p \Leftrightarrow q$ es V

(ii) $\overline{r \Rightarrow s}$ es V (que es lo mismo que decir que $r \Rightarrow s$ es F)

(iii) $\bar{t}$ es V (que es lo mismo que decir que t es F)

De (ii) tenemos que $r \Rightarrow s$ es FALSO, entonces necesariamente r es V y s es F (la misma explicación de la primera línea).

veamos ahora la parte (b). Esta se compone de 2 partes unidas por un $\wedge$. Por lo tanto, para que (b) sea FALSO, basta con que alguna de las partes sea falsa. Pero ya sabemos que s es F , por lo tanto $\bar{s}$ es V . Entonces necesariamente $q \Rightarrow s$ debe ser Falsa para que (b) también lo sea. Como ya hemos visto, la única opción para que esto sea posible es que q sea V y s sea F . Ahora solo nos falta determinar el valor de verdad de p . Pero (i) nos dice que será el mismo que q . Entonces deducimos que p es V .

Finalmente, podemos concluir que

$$\begin{array}{ll} p \Leftrightarrow V & s \Leftrightarrow F \\ q \Leftrightarrow V & t \Leftrightarrow F \\ r \Leftrightarrow V & \end{array}$$

P2 a) Recordemos que $(a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow [a \Rightarrow b \wedge b \Rightarrow a]$. Entonces, para demostrar una equivalencia ($\Leftrightarrow$), podemos demostrar cada implica por separado. veamos primero el implica hacia la izquierda:

$\Leftarrow$ P.D.Q $p \Rightarrow [p \vee (p \wedge q)]$

si la hipótesis es verdadera (si p es V), inmediatamente se cumple la primera parte de la conclusión y nos queda algo de la forma $V \vee (p \wedge q)$. Esto es verdadero sin importar el valor de verdad de q .

$$\therefore p \Rightarrow [p \vee (p \wedge q)]$$

$\Rightarrow$ P.D.Q $[p \vee (p \wedge q)] \Rightarrow p$

para que la hipótesis sea verdadera hay 2 opciones:

1) p es V , con lo que se cumple que la conclusión es V .

2) $p \wedge q$ es V . Para que esto ocurra, tanto p como q deben ser V . ya que en particular p debe ser V , la conclusión también lo es.

$$\therefore [p \vee (p \wedge q)] \Rightarrow p$$

ya que se cumplen ambas implica, queda demostrado que

$$[p \vee (p \wedge q)] \Leftrightarrow p //$$

P3] Nuevamente hay varias formas de enfrentar este problema

- 1) Elegante (mágica)
- 2) Contradicción (clásico)
- 3) Matraca (latero, largo)

hagámosla de la más latera

$$[(p \Rightarrow \bar{q}) \wedge (r \Rightarrow q)] \Rightarrow (p \Rightarrow \bar{r})$$

desarma de adentro hacia afuera

caract. implica

$$\Leftrightarrow \sim [(p \Rightarrow \bar{q}) \wedge (r \Rightarrow q)] \vee (p \Rightarrow \bar{r})$$

morgan

$$\Leftrightarrow [\sim(p \Rightarrow \bar{q}) \vee \sim(r \Rightarrow q)] \vee (p \Rightarrow \sim r)$$

caract. implica

$$\Leftrightarrow [\sim(\sim p \vee \sim q) \vee \sim(\sim r \vee q)] \vee (\sim p \vee \sim r)$$

morgan

$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (r \wedge \sim q) \vee (\sim p \vee \sim r)$$

conmutatividad

$$\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee \sim p \vee (r \wedge \sim q) \vee \sim r$$

distributividad

$$\Leftrightarrow [(p \vee \sim p) \wedge (q \vee \sim p)] \vee [(r \vee \sim r) \wedge (\sim q \vee r)]$$

tautología ($p \vee \sim p$ alguna es $\top$)

$$\Leftrightarrow [\top \wedge (q \vee \sim p)] \vee [\top \wedge (\sim q \vee r)]$$

tautología $\top \wedge r \Leftrightarrow r$ (depende sólo del resultado)

asociatividad

$$\Leftrightarrow (q \vee \sim p) \vee (\sim q \vee r) \Leftrightarrow q \vee \sim q \vee \sim p \vee r$$

tautología

$$\Leftrightarrow \top \vee \sim p \vee r \Leftrightarrow \top$$

modo 2] Es una " $\Rightarrow$ " y seré porfiado
esto es falso!

$$\text{recuerda } ((p \Rightarrow \bar{q}) \Leftrightarrow F) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r \wedge q \Rightarrow F) \\ \Rightarrow \underbrace{[(p \Rightarrow \bar{q}) \wedge (r \Rightarrow q)]}_{V} \Rightarrow \underbrace{(p \Rightarrow r)}_F$$

Como $p \Rightarrow \bar{r}$ es F

$$\Rightarrow \boxed{p \Leftrightarrow r} \wedge \bar{r} \Leftrightarrow F \Rightarrow \boxed{r \Leftrightarrow r}$$

por el otro lado $(p \Rightarrow \bar{q}) \wedge (r \Rightarrow q) \Leftrightarrow r$
como es un $\wedge$ la única forma es

$$(p \Rightarrow \bar{q}) \Leftrightarrow r \wedge \boxed{(r \Rightarrow q) \Leftrightarrow r}$$

(si uno fuese falso todo sería falso.)

$$\text{como } (p \Rightarrow \bar{q}) \Leftrightarrow r \text{ y ya se que } \\ (p \Leftrightarrow r) \text{ entonces } \bar{q} \Leftrightarrow r \Rightarrow \boxed{q \Leftrightarrow F}$$

(sino se formaría $r \Rightarrow F$)

pero digamos que $(r \Rightarrow q) \Leftrightarrow r$

$$\text{y } r \Leftrightarrow r \text{ y } q \Leftrightarrow F$$

$$\Rightarrow \bar{r} \Rightarrow F \Leftrightarrow r \text{ ? En, qué me}$$

equivoque si ta todo bien.
ah! en creer que la proposición era falsa
o la proposición siempre es verdadera.

forma 3 | por contrarrecíproca
 $(P \Rightarrow \bar{q}) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg P)$

$$[(P \Rightarrow \bar{q}) \wedge (r \Rightarrow q)] \Leftrightarrow [(P \Rightarrow \bar{q}) \wedge (\bar{q} \Rightarrow \bar{r})]$$

luego por transitividad

$$P \Rightarrow \bar{r} //$$

creo que la forma 3 es un poco más corta...

moraleja: No te tires a hacer de una un problema, respira piensa y luego toma el lápiz.

P4 | a) Hay un elemento en A, que es mayor a los otros
 $(\exists x \in A)$

¿Quiénes son los otros?

Son todos los del conjunto que no

son X.

$$\Rightarrow (\exists x \in A) (\forall y \in A) : (x \neq y \Rightarrow x > y)$$

claramente verdad basta tomar el 6

Negación: No hay ninguno que le gane a todos los otros
sí es verdad es una negación, pero no nos gustan

las cosas del estilo. No hay ninguna que...
es más bonito decir todos no cumplen.

⇒ Todos los elementos en A no son
mayores que el resto

dinero ¿no son mayores que...?
es más bonito decir son menores que
ahora ojo. ¿son menores que todos?

NO! no son mayores que el resto,
o sea hay al menos uno que le gana
(pueden ser más o no, pero solo
necesito uno) o pueden empatar.

⇒ Todos los elementos de A tienen
uno que les gana (o empatan)
ahí te voy creyendo más, fíjate
que en ninguna parte hay un no.

$$(\forall x \in A)(\exists y \in A): x \leq y$$

b) Para cada elemento $(\forall x \in A)$
existe $(\exists y \in A)$
otro en A $x \neq y$
que es menor o igual $y \leq x$

$$(\forall x \in A)(\exists y \in A): x \neq y \wedge y \leq x.$$

Falso! pues el Δ no tiene ninguno.
que sea menor o igual a él.

negación: existe un elemento en A
tal que todos los otros son
mayores a él

$$(\exists x \in A)(\forall y \in A) : x \leq y \quad (\text{el no ser igual
es implícito al ser
estrictamente mayor})$$

$$\Rightarrow (\exists x \in A)(x^2 = x)$$

$\forall$ está el 1

negación: $(\forall x \in A)(x^2 \neq x)$

PS si te fijas en la pregunta anterior

$(\forall x \in A)(\exists x \in A)$ NO NECESARIAMENTE
ES LO MISMO QUE $(\exists x \in A)(\forall x \in A)$

el primero dice todos tienen uno,
y el segundo dice hay uno que sirve
para todos.

así es claro que

P es Falsa y q es verdadera.

las negaciones usan el mismo argumento que
la p4

np: $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) x > y$

ng: $(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) x > y$

P6 | si los 123 suman 3813 $\Rightarrow$ existen 100
que suman 3100

Por contradicción, soy porfiado.

$\neg \Rightarrow \text{F}$

$\Rightarrow$ es falso que existen 100 que sumen 3100

$\Rightarrow$ cualquier grupo que tome de 100 no suma 3100, ni siquiera los 100 mayores.

$\Rightarrow$ si tomamos los 100 mayores al menos 1 es menor a 31
(sino sumar 3100 o más)

pero los 23 que sobran suman 714 (o más)

$$\frac{714}{23} = 31, \dots \text{ y son los menores}$$

23 números menores que 31
no pueden sumar 714 $\rightarrow \leftarrow$

No te asustes si te cuesta, en un control jamás te aparecerá algo así pero es para que veas que la lógica sí se usa.

