Introducción al Álgebra

Control 5 - Pauta Problema 1

$(K,+,\cdot)$ cuerpo, $(A,\oplus,\odot)$ anillo con unidad y $f: K \longrightarrow A$ tal que $f:(K,+)\longrightarrow(A,\oplus)$ y $f:(K,\cdot)\longrightarrow(A,\odot)$ son morfismos y $f(1_K)=1_A\neq 0_A$

Probar que: i) 1) $f(0_K)=0_A$

0_K es neutro en el cuerpo K para $+$, así $0_K+0_K=0_K$ y por el morfismo $f(0_K)=f(0_K+0_K)=f(0_K)\oplus f(0_K)$ donde $f(0_K)\in A$ es cancelable ($(A,\oplus)$ es grupo abeliano). Así $\underbrace{(f(0_K)-f(0_K))}_{0_A}=f(0_K)+\underbrace{(f(0_K)-f(0_K))}_{0_A}$

(1.0) $\rightarrow$ $f(0_K)=0_A$

2) Dem que $\forall x\in K$ $f(-x)=-f(x)$

En efecto. $\forall x\in K$, $\exists -x\in K$ tq $x+(-x)=0_K$ pues $(K,+)$ es grupo abeliano. Así $f(x+(-x))=f(0_K)=0_A \overset{\text{Morf}}{\Rightarrow} f(x)\oplus f(-x)=0_A$

(1.0) Sigue que $f(-x)=-f(x)$

3) $(f(K),\oplus)$ es subgrupo de $(A,\oplus)$

Sean $y_1,y_2\in f(K)$. Por demostrar que $(y_1\oplus -y_2)\in f(K)$ (Prop. compacta)

(0.5) En efecto, $y_1,y_2\in f(K)\Rightarrow \exists x_1,x_2\in K$ t.q. $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)\wedge -y_2=-f(x_2)=f(-x_2)$

(0.5) Así $y_1\oplus(-y_2)=f(x_1)\oplus f(-x_2)\overset{\text{Morfismo}}{=}f(x_1+(-x_2))\in f(K)$ pues $(x_1+(-x_2))\in K$

ii) $f(x)=0_A \Longleftrightarrow x=0_K$

(0.5) Dem($\Leftarrow$) $x=0_K \Rightarrow f(x)=f(0_K)=0_A$ (según 1 i)

Dem($\Rightarrow$) Por contradicción. Sea $f(x)=0_A$ y supongamos que $x\neq 0_K$ entonces $x\in K$ es invertible, es decir $\exists x^{-1}\in K$ tq $x\cdot x^{-1}=1_K \overset{\text{Morf}}{\Rightarrow} f(x)\odot f(x^{-1})=f(1_K)$

$\Rightarrow \underbrace{f(x)}_{0_A}\odot f(x^{-1})=\underbrace{f(1_K)=1_A}_{\text{hipótesis}} \Rightarrow \underbrace{0_A\cdot f(x^{-1})}_{0_A}=1_A \Rightarrow 0_A=1_A$ lo que es una contradicción

(1.0) Sigue que $x=0_K$

(1.5) iii) $f(x)$ es inyectiva: En efecto, sean $x,y\in K$ tq $f(x)=f(y)\Rightarrow f(x)\oplus f(-y)=0_A$

$\Rightarrow f(x-y)=0_A \Rightarrow$ según (1 ii) $x-y=0_K \Rightarrow x=y \Rightarrow f$ es inyectiva

Pauta Problema 2

i) $f(x)=x^5$ es biyectiva y $\forall x,y \in \mathbb{R}$ $x * y = \sqrt[5]{x^5+y^5}$

Demostrar que $f:(\mathbb{R},*)\to(\mathbb{R},+)$ y $f:(\mathbb{R},\cdot)\to(\mathbb{R},\cdot)$ son isomorfismos

En efecto, sean $x,y\in\mathbb{R}$ $f(x*y)=\left(\sqrt[5]{x^5+y^5}\right)^5=x^5+y^5=f(x)+f(y)$

y como f es biyectiva y $f(x*y)=f(x)+f(y)$ es morfismo,

(1.5) $\rightarrow$ $f:(\mathbb{R},*)\to(\mathbb{R},+)$ es un isomorfismo

Tambien para $x,y\in\mathbb{R}$ $f(x\cdot y)=(x\cdot y)^5=x^5\cdot y^5=f(x)\cdot f(y)$ morfismo.

(0.5) $\rightarrow$ por lo tanto $f:(\mathbb{R},\cdot)\to(\mathbb{R},\cdot)$ es tambien un isomorfismo.

ii) Mostrar que $(\mathbb{R},*,\cdot)$ es cuerpo.

Se debe probar que: $(\mathbb{R},*)$ es grupo Abeliano

$(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$ es grupo Abeliano

$\cdot$ distribuye con respecto a $*$

Dado que el neutro para $*$ es 0, no es necesario probar que

(1.0) $\rightarrow$ $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$ es grupo abeliano y se acepta como información conocida

$(\mathbb{R},*)$ grupo Abeliano:

Asociatividad: $x*(y*z)=x*\sqrt[5]{y^5+z^5}=\sqrt[5]{x^5+\left(\sqrt[5]{y^5+z^5}\right)^5}=\sqrt[5]{x^5+(y^5+z^5)}$

$=\sqrt[5]{(x^5+y^5)+z^5}=(x*y)*z$

(1.0) $\rightarrow$ Conmutatividad: $(x*y)=\sqrt[5]{x^5+y^5}=\sqrt[5]{y^5+x^5}=(y*x)$

Neutro: $x*e=x \Rightarrow \sqrt[5]{x^5+e^5}=x^5 \to \cancel{x^5}+e^5=\cancel{x^5} \Rightarrow e=0$

Simétricos: $x*x'=e=0 \Rightarrow \sqrt[5]{x^5+(x')^5}=0 \to (x')^5=-x^5 \to x'=-x$

(1.0) $\rightarrow$ Sigue que $(\mathbb{R},*)$ es grupo Abeliano.

Distributividad: $x\cdot(y*z)=x\cdot\sqrt[5]{y^5+z^5}=\sqrt[5]{x^5y^5+x^5z^5}=\sqrt[5]{(xy)^5+(xz)^5}$

$=(xy)*(xz)$

(1.0) $\rightarrow$ Se concluye que $(\mathbb{R},*,\cdot)$ es Cuerpo.