Rodolfo Núñez | Auxiliar 14-15 | 5/7/2008

Intro al Álgebra (MA1101)

Ya subieron las soluciones de las P2-P3-P4 de la semana 14 y las P1-P3 de la semana 15, así que les subiré solo las que faltan. (la P4 de la semana 15 se repite de la semana 13)

Semana 14

P1. Sea $p(z) = z^3 + az^2 + bz + c$ un polinomio con raíces $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$

P.D.Q. $\alpha\beta\gamma = -c$; $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = b$; $\alpha + \beta + \gamma = -a$

Tenemos 3 raíces de $p(t)$, que es de grado 3 $\therefore$ las tenemos todas. Podemos escribir $p(t)$ como

$$p(t) = (z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma) = (z^2 - \beta z - \alpha z + \alpha\beta)(z-\gamma)$$

$$= (z^3 - \gamma z^2 - \beta z^2 - \alpha z^2 + \beta\gamma z + \alpha\gamma z + \alpha\beta z - \alpha\beta\gamma)$$

$$= z^3 - (\alpha+\beta+\gamma)z^2 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)z - \alpha\beta\gamma$$

$$= p(t) = z^2 + az^2 + bz + c$$

igualando cada coeficiente:

$$-(\alpha+\beta+\gamma) = a \ ; \ (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) = b \ ; \ -\alpha\beta\gamma = c$$

q.e.d.

Propuesto: Generalícenlo para el caso con $\text{grad}(p(t)) = n$ y conociendo los a_i $/ i \in \{0, \dots, n\}$ coeficientes del polinomio (al menos determinen a_0 y a_n)

Aplicar lo anterior para encontrar las raíces de $q(z) = z^3 - 11z^2 + 44z - 112$ sabiendo que tiene una raíz compleja de módulo 4

sea $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ raíz compleja $\Rightarrow q(z)$ tendrá a $\beta = \bar{\alpha}$ como raíz (la conjugada) y la otra será real (γ), ya que tiene grado 3.

notar que $\alpha\beta = \alpha\bar{\alpha} = |\alpha|^2 = 4^2 = 16$

aplicando lo anterior:

$-(-112) = \alpha \cdot \bar{\alpha} \cdot \gamma = 16\gamma \Rightarrow \gamma = \frac{112}{16} = \boxed{7 = \gamma}$

notar que $\alpha + \beta = \alpha + \bar{\alpha} = 2\,Re(\alpha)$

$\therefore -(-11) = \alpha + \beta + \gamma = 2\,Re(\alpha) + 7 \Rightarrow Re(\alpha) = 2$

$\alpha = 2 + ib \;;\; \beta = 2 - ib \;;\; \gamma = 7$

$\Rightarrow 44 = \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = 4 + b^2 + 14 + \cancel{7ib} + 14 - \cancel{7ib}$

$= 32 + b^2 = 44$

$\Rightarrow b^2 = 12 \Rightarrow b = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ NOTA: aquí da lo mismo poner $\pm$, se considera en las raíces

$\Rightarrow \boxed{\alpha = 2 + i\,2\sqrt{3}} \;;\; \boxed{\beta = 2 - i\,2\sqrt{3}}$

P5. $p(x) \in \mathbb{C}[x]$, $gr(p(x)) \geq 4$; $a, b, c \in \mathbb{R}$ / $b \neq 0$

se sabe que

(i) $p(x) = q(x)(x^2 - b^2) + cx$

(ii) $p(x) = q'(x)(x^2-b^2)(x-a) + r(x)$ / $r(x)$ mónico

NOTA: Es bueno que escriban todas las hipótesis que tienen para aclarar ideas y hacer nexos entre hipótesis más rápidamente. Arriba usé el teorema de la división

(a) Determine $p(b)$ y $p(-b)$

· $p(b)$

$$p(b) = q(b)\underbrace{(b^2 - b^2)}_{=0} + c \cdot b \quad \text{por (i)}$$

$$= 0 + cb = cb$$

$$\Rightarrow \boxed{p(b) = cb}$$

· $p(-b)$

$$p(-b) = q(x)\underbrace{((-b)^2 - b^2)}_{=0} + c(-b) \quad \text{por (i)}$$

$$= 0 - cb = -cb$$

$$\Rightarrow \boxed{p(-b) = -cb}$$

NOTA: Además se puede hacer por teorema del resto

(b) P.D.Q. $\text{grad}(r(x)) \leq 2$

$p(x) = q'(x)(x^2-b^2)(x-a) + r(x)$ por teo. de la div., el que dice, además, que $\text{grad}((x^2-b^2)(x-a)) > \text{grad}(r(x)) = n$

Como $\text{grad}((x^2-b^2)(x-a)) = 3 \Rightarrow 3 > n \Leftrightarrow n \leq 2$ q.e.d.

(c) Determine $r(x)$

Primero:

$$q(x)(x^2-b^2)+cx = q'(x)[(x^2-b^2)(x-a)] + r(x) \quad \left(\begin{matrix}\text{mezclando (i)}\\ \text{con (ii)}\end{matrix}\right)$$

$$\Rightarrow r(x) = (x^2-b^2)\underbrace{[q(x)-q'(x)(x-a)]}_{d(x)} + cx \quad \circledast$$

Tomemos $r(x)$ y dividámoslo por (x^2-b^2)

$$r(x) = q''(x)(x^2-b^2) + r'(x) \qquad / \, gr(r'(x)) < gr(x^2-b^2) = 2$$

$$\therefore gr(r'(x)) \leq 1$$

Como $gr(r(x)) \leq 2$ por (b)

$\Rightarrow gr(q''(x)) = 0 \Rightarrow \underbrace{q''(x)}_{d\in\mathbb{R}}$ es cte, ya que si no fuera, $gr(r(x)) \geq 3$

$\Rightarrow r(x) = d(x^2-b^2)+r'(x)$ Hay 2 casos posibles, ya que $r(x)$ debe ser mónico: $d=1$ o $d=0$

Comparando con $\circledast \Rightarrow r(x) = d(x^2-b^2)+r'(x) = d'(x)(x^2-b^2)+cx$

$\therefore r'(x) = cx$ por la unicidad del resto (NOTA: Dividimos por (x^2-b^2) en ambos casos)

$\Rightarrow$ Caso 1 $\quad r(x) = x^2+cx-b^2 \quad$ si $d=1$

Caso 2 $\quad r(x) = x \quad$ si $d=0$ (ya que $c=1$ para que sea mónico)

Semana 15

P2 Sea $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ un polinomio con coef. en $\mathbb{R}$. Sea $r(x)$ t.q.

$$p(x) = (x-1)\,q(x) + r(x)$$

si $r(4) = 0$ y $x = i$ es raíz de $p(x)$, calcule a, b, c.

Aquí podríamos aplicar lo aprendido en la P1 - S14

Primero veamos qué implican $r(4) = 0$ y $x = i$ raíz

·) $p(i) = 0 = (i-1)\,q(i) + r(i) \quad \therefore \quad p(-i) = 0 = (-i-1)\,q(-i) + r(-i)$

ya que $i = \overline{-i}$

·) $r(4) = 0 \Rightarrow p(4) = (4-1)\,q(4) + r(4) = 3\,q(4)$

Sea α la 3^ra raíz (que será real)

·) $i \cdot (-i) \cdot \alpha = -c = \alpha$ (por P1 - S14)

·) $i - i + \alpha = -a = \alpha \Rightarrow c = a$

·) $i(-i) + \cancel{i\alpha} - \cancel{i\alpha} = \boxed{b = 1}$

$\Rightarrow p(x) = x^3 + ax^2 + x + a$

Como $r(4) = 0$, dividamos por $(x-4)$ para obtener un $q(x)$ sin resto (por el teorema del resto)

$\Rightarrow p(x) = (x-4)\, q'(x) + 0$

$\Rightarrow$ 4 es la raiz real ya que

$p(4) = (4-4)\, q'(x) = 0$

$\Rightarrow \boxed{c = a = -4}$

$\Rightarrow \boxed{p(x) = x^3 - 4x^2 + x - 4}$

Mucho Exito!

Dudas a:
RODO.NUNEZ.U@GMAIL.COM
Rodolfo Núñez