Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Escuela de Ingeniería

Solución Problemas Semana 12

MA1101 - Introducción al Álgebra

Profesor: Pablo Figueroa
Auxiliares: Roberto Castillo, Francisco Castro

P1.-

(a) Se observa que $\overline{z_1 \cdot \overline{z_2}} = \overline{z_1} \cdot z_2$ por lo que se tiene que $z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = 2\mathbb{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2})$. Para calcular esta parte real, se considera $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$ y $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$ con esto, $z_1 \cdot \overline{z_2} = |z_1 \cdot z_2|e^{i(\theta_1-\theta_2)}$, por lo que se obtiene que $2\mathbb{Re}(z_1 \cdot \overline{z_2}) = 2|z_1 \cdot z_2|cos(\theta_1 - \theta_2)$ e interpretando geométricamente, se nota que $\theta_1 - \theta_2$ es el ángulo entre z_1 y z_2.

(b) Basta calcular y utilizar la identidad obtenida en (a):

$$\begin{aligned} |s|^2 &= (u-v)\overline{(u-v)} \\ &= (u-v)(\overline{u}-\overline{v}) \\ &= u\overline{u} + v\overline{v} + u\overline{v} + \overline{u}v \\ &= |u|^2 + |v|^2 + 2|uv|cos(\phi) \end{aligned}$$

donde ϕ es el ángulo entre u y v.

P2.-
Se tiene que $\mathcal{R}$ es refleja, pues para $z \in \mathbb{C}$ $|z| = |z|$.
Además es simétrica, pues para $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ $|z_1| = |z_2| \Leftrightarrow |z_2| = |z_1|$.
Finalmente, la transitividad también se tiene, pues para $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ si $|z_1| = |z_2|$ y además $|z_2| = |z_3|$, se tiene que $|z_1| = |z_3|$.
Así, se tiene que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia.
Para graficar la clase de equivalencia de $2+i\sqrt{5}$, basta notar que la clase de equivalencia son los elementos que tienen igual módulo, por lo que corresponde a una circunferencia de radio 3 centrada en 0.

P3.-
Es importante notar que $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, luego $z = (1+i\rho)^n + (1-i\rho)^n$, se tiene que $\overline{z} = \overline{(1+i\rho)^n + (1-i\rho)^n} = \overline{(1+i\rho)^n} + \overline{(1-i\rho)^n} = (\overline{1+i\rho})^n + (\overline{1-i\rho})^n = (1-i\rho)^n + (1+i\rho)^n = z$. Luego se tiene $\overline{z} = z$ y esto implica que $z \in \mathbb{R}$.

P4.-
Se calcula:

$$\begin{aligned} |z+i| = |z-i| &\Leftrightarrow (z+i)\overline{(z+i)} = (z-i)\overline{(z-i)} \\ &\Leftrightarrow (z+i)(\overline{z}-i) = (z-i)(\overline{z}+i) \\ &\Leftrightarrow |z|^2 + 1 - iz + i\overline{z} = |z|^2 + 1 - i\overline{z} + iz \\ &\Leftrightarrow 2iz = 2i\overline{z} \\ &\Leftrightarrow z = \overline{z} \\ &\Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

P5.-
Se calcula:

$$\begin{aligned}
|\frac{z-2}{z+1}| = 2 \quad &\Leftrightarrow \quad |z-2| = 2|z+1| \\
&\Leftrightarrow \quad (z-2)(\overline{z}-2) = 4(z+1)(\overline{z}+1) \\
&\Leftrightarrow \quad |z|^2 - 2(z+\overline{z}) + 4 = 4|z|^2 + 4(z+\overline{z}) + 4 \\
&\Leftrightarrow \quad 3|z|^2 + 2(z+\overline{z}) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad |z|^2 + \frac{2}{3}(z+\overline{z}) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad |z|^2 + \frac{2}{3}(z+\overline{z}) + \frac{4}{9} = \frac{4}{9} \\
&\Leftrightarrow \quad (z-\frac{2}{3})(\overline{z}-\frac{2}{3}) = \frac{4}{9} \\
&\Leftrightarrow \quad |z-\frac{2}{3}| = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Con lo que se comprueba que el conjunto es una circunferencia de centro $\frac{2}{3}$ y radio $\frac{2}{3}$.

P6.-
Se observa que

$$\begin{aligned}
(1-i)^4(1+i)^4 &= \overline{(1+i)}^4(1+i)^4 \\
&= (\overline{(1+i)}(1+i))^4 \\
&= (|1+i|^2)^4 \\
&= 16
\end{aligned}$$

Lo que corresponde a la forma $a+bi$.
Se mira ahora el segundo complejo:

$$\begin{aligned}
1+i+\frac{i-1}{|1-i|^2+i} &= 1+i\frac{i-1}{4+i} \\
&= 1+i\frac{(i-1)(4-i)}{17} \\
&= \frac{14}{17}+i\frac{22}{17}
\end{aligned}$$

con lo que se tiene lo pedido.

P7.-

(a) Se tiene que

$$\begin{aligned}
S+iS' &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}cos(k\alpha)+i\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}sen(k\alpha)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(cos(k\alpha)+isen(k\alpha))\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ik\alpha}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(e^{i\alpha})^k 1^{n-k}\\
&= (1+e^{i\alpha})^n\\
&= (1+cos(\alpha)+isen(\alpha))^n
\end{aligned}$$

(b) Basta calcular:

$$\begin{aligned}
1+cos(\alpha)+isen(\alpha) &= 1+cos(2\frac{\alpha}{2})+isen(2\frac{\alpha}{2})\\
&= 1+cos^2(\frac{\alpha}{2})-sen^2(\frac{\alpha}{2})+i2sen(\frac{\alpha}{2})cos(\frac{\alpha}{2})\\
&= 2cos^2(\frac{\alpha}{2})+i2sen(\frac{\alpha}{2})cos(\frac{\alpha}{2})\\
&= 2cos(\frac{\alpha}{2})[cos(\frac{\alpha}{2})+isen(\frac{\alpha}{2})]\\
&= 2cos(\frac{\alpha}{2})e^{i\frac{\alpha}{2}}
\end{aligned}$$

utilizando esto en la igualdad obtenida en la parte (a) se tiene que

$$S+iS' = 2^n cos^n(\frac{\alpha}{2})e^{in\frac{\alpha}{2}}$$

de esta igualdad de números complejos, igualando partes reales e imaginarias se obtiene

$$S = 2^n cos^n(\frac{\alpha}{2})cos(n\frac{\alpha}{2})$$

y

$$S' = 2^n cos^n(\frac{\alpha}{2})sen(n\frac{\alpha}{2})$$