13. Semana 12

P1 **(a)** Sean $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$ y $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$ las representaciones polares de z_1 y z_2 respectivamente, el ángulo entre z_1 y z_2, es decir entre θ_1 y θ_2, puede ser $\theta_1 - \theta_2$ o $\theta_2 - \theta_1$ (dependiendo si $\theta_1 > \theta_2$ o si $\theta_2 > \theta_1$ respectivamente), supondremos, sin pérdida de generalidad, que $\theta_1 > \theta_2$, con esto $\theta_1 - \theta_2 = \phi$, recordar que $\overline{z_2} = \overline{|z_2|e^{i\theta_2}} = |z_2|e^{-i\theta_2}$ luego $z_1 \cdot \overline{z_2} = |z_1||z_2|e^{i(\theta_1-\theta_2)} = |z_1||z_2|e^{i\phi}$. Notemos que el conjugado de $z_1 \cdot \overline{z_2}$ es $\overline{z_1} \cdot z_2$, con esto $z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1} \cdot z_2 = 2Re(z_1 \cdot \overline{z_2}) = 2Re(|z_1||z_2|e^{i\phi}) = 2|z_1||z_2|Re(e^{i\phi}) = 2|z_1||z_2|\cos\phi$. Notar que como coseno es par, $\cos\phi = \cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos(\theta_2 - \theta_1)$ con lo cual se deduce que sin importar las condiciones de los ángulos se llega al mismo resultado.

(b)

$$
\begin{aligned}
|s|^2 &= |u-v|^2 \\
&= (u-v)\overline{(u-v)} \\
&= (u-v)(\overline{u}-\overline{v}) \\
&= u\overline{u} - u\overline{v} - v\overline{u} + v\overline{v} \\
&= u\overline{u} + v\overline{v} - (u\overline{v} + v\overline{u}) \\
&= |u|^2 + |v|^2 - 2|u||v|\cos\phi \qquad \backslash\text{usando la parte (a)}
\end{aligned}
$$

P2 La relación es de equivalencia si es refleja, simétrica y transitiva

- Refleja: Sea $z_1 \in \mathbb{C}$ es claro que $|z_1| = |z_1| \Leftrightarrow z_1 \mathcal{R} z_1$.
- Simétrica: Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, como $z_1 \mathcal{R} z_2 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2| \Leftrightarrow |z_2| = |z_1| \Leftrightarrow z_2 \mathcal{R} z_1$.
- Transitiva: Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, como $z_1 \mathcal{R} z_2$ y $z_2 \mathcal{R} z_3$ se tiene que $|z_1| = |z_2| = |z_3| \Rightarrow |z_1| = |z_3| \Leftrightarrow z_1 \mathcal{R} z_3$.

Luego la relación es de equivalencia, para la clase de equivalencia de z_0 tenemos que

$$[z_0]_{\mathcal{R}} = \{z \in \mathbb{C} \mid z_0 \mathcal{R} z\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |2 + i\sqrt{5}| = |z|\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 3\}$$

Dado que $z = x + iy$ esto quiere decir que $|x + iy| = 3$ o lo que es lo mismo $x^2 + y^2 = 3^2$, esto describe una circunfenrencia de radio 3 centrada en el origen.

P3 Primero notemos que $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$, si concluimos que $\overline{z} = z$, entonces $z \in \mathbb{R}$, entonces procedemos a obtener su conjugado

$$
\begin{aligned}
\overline{z} &= \overline{(1+i\rho)^n + (1-i\rho)^n} \\
&= \overline{(1+i\rho)^n} + \overline{(1-i\rho)^n} \qquad \backslash\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \\
&= \overline{(1+i\rho)}^n + \overline{(1-i\rho)}^n \qquad \backslash\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \text{ inductivamente } \overline{z^n} = \overline{z}^n \\
&= (1-i\rho)^n + (1+i\rho)^n \\
&= z
\end{aligned}
$$

Se concluye que $z \in \mathbb{R}$.

P4 Basta demostrar que $z = \overline{z}$

$$\begin{aligned}
|z+i| &= |z-i| \\
|z+i|^2 &= |z-i|^2 \\
(z+i)\overline{(z+i)} &= (z-i)\overline{(z-i)} \\
(z+i)(\overline{z}-i) &= (z-i)(\overline{z}+i) \\
z\overline{z} - zi + i\overline{z} - i^2 &= z\overline{z} + zi - i\overline{z} - i^2 \\
-zi + i\overline{z} - i^2 &= zi - i\overline{z} - i^2 \\
-zi + i\overline{z} - (-1) &= zi - i\overline{z} - (-1) \\
-zi + i\overline{z} + 1 &= zi - i\overline{z} + 1 \\
-zi + i\overline{z} &= zi - i\overline{z} \\
2\overline{z}i &= 2zi \qquad \backslash \cdot 2i \\
-4\overline{z} &= -4z \\
\overline{z} &= z
\end{aligned}$$

Se concluye que $z \in \mathbb{R}$.

P5 Notemos que $z = x + iy$, luego

$$\begin{aligned}
\left|\frac{z-2}{z+1}\right| &= 2 \\
\left|\frac{x+iy-2}{x+iy+1}\right| &= 2 \\
\frac{|x+iy-2|}{|x+iy+1|} &= 2 \qquad \backslash \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \\
\frac{|(x-2)+iy|}{|(x+1)+iy|} &= 2 \\
\frac{\sqrt{(x-2)^2+y^2}}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} &= 2 \\
\frac{(x-2)^2+y^2}{(x+1)^2+y^2} &= 4 \\
(x-2)^2+y^2 &= 4((x+1)^2+y^2) \\
x^2-4x+4+y^2 &= 4(x^2+2x+1+y^2) \\
x^2-4x+4+y^2 &= 4x^2+8x+4+4y^2 \\
0 &= 3x^2+12x+3y^2 \\
0 &= x^2+4x+y^{)} \\
0 &= x^2+4x+y^2+4-4 \qquad \backslash\text{sumar } 0 \\
0 &= (x^2+4x+4)+y^2-4 \\
0 &= (x+2)^2+y^2-4 \\
2^2 &= (x+2)^2+y^2
\end{aligned}$$

Lo que corresponde a una circunferencia de radio 2 y centro en (-2,0).

P6

$$\begin{aligned}
(1-i)^4(1+i)^4 &= [(1-i)(1+i)]^4 \\
&= (1^2-i^2)^4 \\
&= (1-(-1))^4 \\
&= 2^4 \\
&= 16
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
1+i+\frac{i-1}{|1-i|^2+i} &= 1+i+\frac{i-1}{(1-i)\overline{(1-i)}+i}\\
&= 1+i+\frac{i-1}{(1-i)(1+i)+i}\\
&= 1+i+\frac{i-1}{1^2-i^2+i}\\
&= 1+i+\frac{i-1}{2+i} \qquad \backslash\cdot\frac{2-i}{2-i}\\
&= 1+i+\frac{i-1}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}\\
&= 1+i+\frac{(i-1)(2-i)}{2^2-i^2}\\
&= 1+i+\frac{2i-i^2-2+i}{5}\\
&= 1+i+\frac{3i-1}{5}\\
&= 1+i+\frac{3i}{5}-\frac{1}{5}\\
&= \frac{4}{5}+\frac{8i}{5}
\end{aligned}
$$

P7 (a)

$$
\begin{aligned}
S+iS' &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(k\cdot\alpha)+i\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(k\cdot\alpha)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\cos(k\cdot\alpha)+i\sin(k\cdot\alpha))\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ik\alpha}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ik\alpha}\cdot 1^{n-k} \qquad \backslash 1^{n-k}=1\\
&= (e^{i\alpha}+1)^n\\
&= (\cos\alpha+i\sin\alpha+1)^n
\end{aligned}
$$

(b) Usando la indicación se tiene que

$$\begin{aligned}
(\cos\alpha + i\sin\alpha + 1)^n &= (\cos^2(\alpha/2) - \sin^2(\alpha/2) + 2i\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2) + 1)^n\\
&= (\cos^2(\alpha/2) + 2i\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2) + 1 - \sin^2(\alpha/2))^n\\
&= (\cos^2(\alpha/2) + 2i\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2) + \cos^2(\alpha/2))^n\\
&= (2\cos^2(\alpha/2) + 2i\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2))^n\\
&= [2\cos(\alpha/2)(\cos(\alpha/2) + i\sin(\alpha/2))]^n\\
&= 2^n\cos^n(\alpha/2)(\cos(\alpha/2) + i\sin(\alpha/2))^n\\
&= 2^n\cos^n(\alpha/2)(e^{i\alpha/2})^n\\
&= 2^n\cos^n(\alpha/2)(e^{in\cdot\alpha/2})\\
&= 2^n\cos^n(\alpha/2)(\cos(n\cdot\alpha/2) + i\sin(n\cdot\alpha/2))\\
S + iS' &= 2^n\cos^n(\alpha/2)\cos(n\cdot\alpha/2) + i2^n\cos^n(\alpha/2)\sin(n\cdot\alpha/2)
\end{aligned}$$

Recordemos que esta expresión es equivalente con $S + iS'$, luego igualando partes real e imaginaria con sus respectivos términos se tiene que $S = 2^n\cos^n(\alpha/2)\cos(n\cdot\alpha/2)$ y $S' = 2^n\cos^n(\alpha/2)\sin(n\cdot\alpha/2)$.