Pauta Control 6

P1.

(a) $a \in \mathbb{R}$, fijo y $\varphi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(P) = P(a), \quad \forall P \in \mathbb{R}[x]$. Se probará que φ es un homomorfismo sobreyectivo entre los anillos $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ y $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.
Morfismo aditivo: Sean $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ (P y Q son tambien funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$)
$\varphi(P+Q) = (P+Q)(a) = P(a) + Q(a) = \varphi(P) + \varphi(Q)$. (0.7 ptos.)
Morfismo multiplicativo: $\varphi(PQ) = (PQ)(a) = P(a) \cdot Q(a) = \varphi(P) \cdot \varphi(Q)$ (0.7 ptos.)
φ es sobreyectiva si $\forall c \in \mathbb{R}\ \exists P \in \mathbb{R}[x]$ tal que $\varphi(P) = c$.
Basta tomar $P \in \mathbb{R}(x)$ tal que $P(x) = c$ (Polinomio constante) con lo cual
$\varphi(P) = P(a) = c$. Sigue que φ es morfismo sobreyectivo. (0.8 ptos.)
φ no es isomorfismo porque φ no es inyectiva y por lo tanto no es biyectiva.
Por ejemplo, para $P(x) = x$ y $Q(x) = a$, $P \neq Q$, pero $\varphi(P) = P(a) = a = Q(a) = \varphi(Q)$. (0.8 ptos.)
Observación: También puede argumentarse diciendo que no es posible construir un isomorfismo entre el anillo $(\mathbb{R}[x], +. \cdot)$ y $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ que más allá de anillo, es cuerpo.

(b) Probar, sin inducción, que $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}, \ \forall n \in \mathbb{N}$. Usamos que $(1+x)^{2n} = (1+x)^n \cdot (1+x)^n$.
El primer miembro es un polinomio de grado $2n$
$(1+x)^{2n} = \sum\limits_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k$, donde el coeficiente de x^n es, claramente, $\binom{2n}{n}$. (1.0 pto.)
El segundo miembro es el producto de dos poninomios de grado n
$(1+x)^n(1+x)^n = (\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k)(\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$. que puede escribirse como
$(P \cdot Q)(x) = \sum\limits_{i=0}^{2n} c_i x^i = \sum\limits_{i=0}^{2n} (\sum\limits_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}) x^i$
donde $c_i = \sum\limits_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}$ y en este caso $a_k = \binom{n}{k}$ y $b_{i-k} = \binom{n}{i-k}$
Así, $c_i = \sum\limits_{k=0}^{i} \binom{n}{k}\binom{n}{i-k}$ de donde el coeficiente de x^n será c_n (1.0 pto.)
es decir $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ y recordando que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
queda $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{k} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$
Los polinomios son iguales y por lo tanto sus coeficientes son iguales, en particular el de x^n.
Se concluye que $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$. (1.0 pto.)

P2.

(a) $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $w = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Encontrar el menor $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $z^n = w^n = 1$.
z y w en forma polar son $z = e^{i\pi/4}$ y $w = e^{i\pi/3}$. (0.5 ptos.)
Además, $z^n = w^n = 1$ puede escribirse como $\frac{w^n}{z^n} = 1$
$\Rightarrow \left(\frac{w}{z}\right)^n = 1$ de donde $\left(\frac{e^{i\pi/3}}{e^{i\pi/4}}\right)^n = 1 \Rightarrow \left(e^{i(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4})}\right)^n = 1$

Así, $e^{i\frac{n\pi}{12}} = 1$ donde $\arg(1) = 0$, $1 = e^{i\cdot 0}$ (1.0 pto.)

es decir $e^{\frac{n\pi}{12}i} = e^{i\cdot 0}$ y por lo tanto $\frac{n\pi}{12} = 2k\pi + 0$, $k \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow n = 24k$ pero $n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Entonces el menor n se obtiene para $k = 1$, es decir $n = 24$ (1.5 ptos.)

(b) (i) Del esquema, es inmediato que $z_A = 1 + i$, $z_B = 2 + i$ y $z_C = 3 + i$

también $|z_A| = \sqrt{2}$, $|z_B| = \sqrt{5}$ y $|z_C| = \sqrt{10}$ $\left(z = c + bi,\ |z| = \sqrt{a^2 + b^2}\right)$

En forma polar, $z = |z|e^{i\theta}$ con $\theta = \arg(z)$

Así, $z_A = \sqrt{2}e^{i\alpha}$, $z_B = \sqrt{5}e^{i\beta}$ y $z_C = \sqrt{10}e^{i\gamma}$. (1.0 pto.)

(ii) Considerando el producto de los tres complejos, se tiene

$z_A \cdot z_B \cdot z_C = (1+i)(2+i)(3+i) = \sqrt{2}e^{i\alpha} \cdot \sqrt{5}e^{i\beta} \cdot \sqrt{10}e^{i\gamma}$.

Resolviendo $(1+3i)(3+i) = 10e^{i(\alpha+\beta+\gamma)} \Leftrightarrow 10i = 10e^{i(\alpha+\beta+\gamma)}$ donde $i = e^{i\pi/2}$. (1.0 pto.)

Sigue que $\alpha + \beta + \gamma = 2k\pi + \pi/2$, pero $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi/2$ es decir

$\alpha + \beta + \gamma < \frac{3\pi}{2}$ y por lo tanto, solamente $k = 0$. Sigue que $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$. (1.0 pto.)