Control 7 AlGEBRA - MA-110

Pauta Problema 1

Sea $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio mónico con $gr(P) = 3$

Se sabe que P es divisible por $(x-1)$ y que los restos de sus divisiones por $(x-2)$, $(x-3)$ y $(x-4)$ son iguales

Se pide determinar $P(x)$, justificando sus pasos y encontrar todas sus raíces.

Solucion:

Como $(x-1) \mid P(x)$, entonces $\exists Q \in \mathbb{R}[x]$ tal que

(1.0) $$P(x) = (x-1)\,Q(x)$$

además, P es mónico, por lo que Q debe ser de la forma

$$Q(x) = x^2 + bx + c$$

(1.0) Así $P(x) = (x-1)(x^2+bx+c)$ es mónico y $gr(P) = 3$

Para determinar b y c se sabe que los restos de dividir P por $(x-2)$, $(x-3)$, $(x-4)$ son iguales

Recordando que el resto de dividir $P(x)$ por $x-\alpha$ es $P(\alpha)$ se tiene:

(1.0) $$P(2) = P(3) = P(4).$$

Sigue que $P(2) = 4 + 2b + c$, $P(3) = 2(9+3b+c)$

y $P(4) = 3(16+4b+c)$

Así $P(2) = P(3) \Rightarrow 4+2b+c = 18+6b+2c \Rightarrow 4b+c = -14$

(2.0) $P(3) = P(4) \Rightarrow 18+6b+2c = 48+12b+3c \Rightarrow 6b+c = -30$

La resolución del sistema nos da $b = -8 \wedge c = 18$

Sigue que $P(x) = (x-1)(x^2-8x+18) = x^3 - 9x^2 + 26x - 18$

Para las raíces de P, una, trivialmente es $x = 1$

Las dos raíces restantes se encuentran de $x^2 - 8x + 18 = 0$

(1.0) y son $x_2 = 4 + i\sqrt{2}$, $x_3 = 4 - i\sqrt{2}$

Pauta Problema 2

a) Sean $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ las raíces ene-ésimas de la unidad

Pruebe que para $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} (w_j)^k = 0$

b) Sea $m \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ y $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ el polinomio de grado m

$$P(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m$$

Demuestre que $\displaystyle\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} P(w_j) = P(0)$

Solución:

a) Cada raíz ene-ésima de la unidad puede escribirse como

(0.5) $$w_j = e^{i\frac{2j\pi}{n}} = \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^j = (w_1)^j$$

Así, $$\sum_{j=0}^{n-1} (w_j)^k = \sum_{j=0}^{n-1} \left[(w_1)^j\right]^k = \sum_{j=0}^{n-1} (w_1^k)^j = \frac{1-(w_1^k)^n}{1-w_1^k}$$

en donde $(w_1^k)^n = (w_1^n)^k = (1)^k = 1 \quad \wedge \quad w_1^k \neq 1$

(1.5) Sigue que $$\sum_{j=0}^{n-1} (w_j)^k = \frac{1-1}{1-w_1^k} = 0$$

b) $$\sum_{j=0}^{n-1} P(w_j) = \sum_{j=0}^{n-1} \underbrace{\sum_{k=0}^{m} a_k (w_j)^k}_{P(w_j)} = \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{n-1} \underbrace{a_k}_{\text{indep. de } j} (w_j)^k = \sum_{k=0}^{m} a_k \sum_{j=0}^{n-1} (w_j)^k$$

(1.0)

La suma interior es nula, según (a), para $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$

de modo que para $k=0$ debe separarse el término.

(2.0) Sigue que $$\sum_{j=0}^{n-1} P(w_j) = \underbrace{a_0 \sum_{j=0}^{n-1} \underbrace{(w_j)^0}_{1}}_{n} + \sum_{k=1}^{m} a_k \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} (w_j)^k}_{0 \text{ según (a)}}$$

Así $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} P(w_j) = n\, a_0$ y $a_0 = P(0)$, entonces

(1.0) $$\sum_{j=0}^{n-1} P(w_j) = n\, P(0) \implies \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} P(w_j) = P(0)$$

AlTERNATIVAMENTE puede resolverse desplegando la suma de los términos de $P(x)$ evaluado en cada raíz de la unidad

Así $P(w_0) = P(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_m$

$$P(w_1) = a_0 + a_1 w_1 + a_2 w_1^2 + \cdots + a_m w_1^m$$

$$P(w_2) = P(w_1^2) = a_0 + a_1 w_1^2 + a_2 w_1^4 + \cdots + a_m (w_1^2)^m$$

$$\vdots$$

1.0

$$P(w_{n-1}) \quad P(w_1^{n-1}) = a_0 + a_1 w_1^{n-1} + a_2 w_1^{2(n-1)} + \cdots + a_m w_1^{(n-1)m}$$

Sumando $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} P(w_k) = n a_0 + a_1 \sum_{i=0}^{n-1} w_1^i + a_2 \sum_{i=0}^{n-1} w_1^{2i} + \cdots + a_m \sum_{i=0}^{n-1} w_1^{mi}$

Pero $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} (w_1^i)^k = 0$ para $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ con $m \le n-1$

2.0

según (a)
Así, las sumas del lado derecho son todas nulas

1.0

Se concluye que $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P(w_k) = a_0 = P(0)$