Introducción al Álgebra (12-1) Control 6

Pauta Problema 1

a) $p, q \in \mathbb{R}[x]$ $\quad p(x) = 2+f+(e+f)x+(a-d)x^4+(2a+c)x^5+(a+b)x^7$

$$q(x) = 3+(f+2)x+(a+b+c+d)x^3+(b+c+1)x^4+bx^5$$

$p = q$ ssi sus coeficientes son iguales. Entonces

ctes: $2+f=3 \Rightarrow f=1$ $\qquad$ coef x^4: $a-d=b+c+1$

coef x: $e+f=f+2 \Rightarrow e=2$ $\qquad$ coef x^5: $2a+c=b$

coef x^2: $0=0$ $\qquad$ coef x^6: $0=0$

0.5 coef x^3: $0=a+b+c+d$ $\qquad$ coef x^7: $a+b=0$

1.0 Resolviendo queda $a=\frac{1}{2}$; $b=-\frac{1}{2}$, $c=-\frac{3}{2}$, $d=\frac{3}{2}$, $e=2$, $f=1$

0.5 Con lo cual $p(x)=q(x)=3+3x-x^4-\frac{1}{2}x^5$

b) $p \in \mathbb{C}[x]$; $p(x) = a_0+a_1x+\dots+a_nx^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

Se define $q : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ por $q(x) = p(ix)$

i) Muestre que $q(x)$ es un polinomio y dé explícitamente sus coeficientes en función de los coeficientes de p

$q(x) = p(ix) = \sum_{k=0}^{n} a_k (ix)^k = \sum_{k=0}^{n} (i^k a_k) x^k$ donde $i^k a_k \in \mathbb{C}$ de

1.0 modo que claramente $q \in \mathbb{C}[x]$, es decir es un polinomio y sus

1.0 coeficientes son: $q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ donde $b_k = i^k a_k$

ii) Demostrar que $p = q \Leftrightarrow$ para cada k no múltiplo de 4, $a_k = 0$

1.0 En efecto, $p = q \Leftrightarrow a_k = i^k a_k \Leftrightarrow i^k = 1 \vee a_k = 0$

1.0 $\Leftrightarrow k = 4m$ $m \in \mathbb{N} \vee a_k = 0$. Pero $k \neq 4m$. Se concluye de $a_k = 0$

Pauta Problema 2

a) Parte real e imaginario de

$$z = (-1+i\sqrt{3})^{3m} + (-1-i\sqrt{3})^{3m} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Se puede observar que $(-1+i\sqrt{3})^{3m} = \overline{(-1-i\sqrt{3})^{3m}}$, es decir son complejos conjugados, por lo tanto, la suma vale

(1.0) $$z = 2\,\mathrm{Re}\left[(-1+i\sqrt{3})^{3m}\right] \in \mathbb{R}$$ (OBSERVACION: Tambien se pueden desarrollar por separado)

Ahora $-1+i\sqrt{3} = \rho e^{i\varphi}$ donde $\rho = \sqrt{1+3} = 2$ y $\tg \varphi = \frac{\sqrt{3}}{-1}$; $\varphi = \frac{2\pi}{3}$

Sigue que $-1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \Rightarrow (-1+i\sqrt{3})^{3m} = \left(2e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{3m} =$

(1.0) $$= 2^{3m} e^{i\frac{2\pi}{3}\cdot 3m} = 2^{3m} \underbrace{\cos(2m\pi)}_{1} + i\underbrace{\sin(2m\pi)}_{0} = 2^{3m}$$

Sigue que $z = 2\,\mathrm{Re}\left[(-1+i\sqrt{3})^{3m}\right] = 2\cdot 2^{3m} = 2^{3m+1}$

(1.0) Entonces $\mathrm{Re}(z) = 2^{3m+1}$, $\mathrm{Im}(z) = 0$

b) Sea $\omega \in \mathbb{C}$ una raiz cúbica de la unidad, con $\omega \neq 1$

Probar que $(1+\omega)^3 + (1+\omega^2)^9 + (1+\omega^3)^6 = 62$

Recordar que $\omega_0 + \omega_1 + \omega_2 = 0$ con $\omega_0 = 1$ y $\omega_2 = \omega_1^2$

Entonces, por ejemplo $1+\omega_1 = -\omega_2 \Rightarrow (1+\omega_1)^3 = (-\omega_2)^3 = -\omega_2^3 = -1$

pues ω_2 es raiz cúbica.

Analogamente $1+\omega_1^2 = 1+\omega_2 = -\omega_1 \Rightarrow (1+\omega_1^2)^9 = (-\omega_1)^9 = -(\omega_1^3)^3$

(2.0) Entonces $(1+\omega_1^2)^9 = -(1)^3 = -1$ (ω_1 es raiz cúbica)

Por último $(1+\omega^3)^6 = (1+1)^6 = 2^6 = 64$

(1.0) Reemplazando queda $(1+\omega)^3 + (1+\omega^2)^9 + (1+\omega^3)^6 = -1 - 1 + 64 = 62$