Pauta Control 7 ALGEBRA

P 1. Los complejos z_1, z_2 son unitarios, es decir $|z_1| = |z_2| = 1$

además $\begin{cases} z_1 + z_2 = -u & , u \in \mathbb{C} \\ z_1 \cdot z_2 = v & , v \in \mathbb{C} \end{cases}$ $(*)$

a) Pruebe que $|u| \leq 2$ y que $|v| = 1$

En efecto, $|z_1 + z_2| = |-u| = |u|$, además $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (Triangular)

Así $|u| = |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| = 1 + 1 = 2$

(1.0) Sigue que $|u| \leq 2$

También $|z_1 z_2| = |v| \Rightarrow |z_1| \cdot |z_2| = |v| \Rightarrow 1 \cdot 1 = |v|$

(0.5) Entonces $|v| = 1$

b) Pruebe que $\overline{z_1} + \overline{z_2} = -\frac{u}{v}$

Dividiendo las expresiones de $(*)$ en donde $v \neq 0$ pues $|v| = 1$

(0.5) $\frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2} = -\frac{u}{v} \Rightarrow \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = -\frac{u}{v}$

Pero $\frac{1}{z_1} = \frac{\overline{z_1}}{z_1 \overline{z_1}} = \frac{\overline{z_1}}{|z_1|^2} = \frac{\overline{z_1}}{1^2} = \overline{z_1}$ pues $|z_1| = 1$, análogo para $\frac{1}{z_2}$

(1.0) Se obtiene $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \boxed{\overline{z_1} + \overline{z_2} = -\frac{u}{v}}$

c) Pruebe que $u = \overline{u} v$

(0.5) De $(*)$ también se obtiene que $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{-u} = -\overline{u}$

es decir $\overline{z_1} + \overline{z_2} = -\overline{u}$, pero de (b) $\overline{z_1} + \overline{z_2} = -\frac{u}{v}$

(1.0) Entonces $-\overline{u} = -\frac{u}{v} \Rightarrow \boxed{u = \overline{u} v}$

d) Al escribir $u = |u| e^{i\varphi}$ y $v = |v| e^{i\theta}$ y usando (c)

queda $u = \overline{u} v \Rightarrow |u| e^{i\varphi} = |u| e^{-i\varphi} \cdot \underbrace{|v|}_{1} e^{i\theta} = |u| e^{-i\varphi} e^{i\theta}$

(1.0) Entonces $|u| e^{i\varphi} = |u| e^{i(\theta - \varphi)} \Rightarrow e^{i\varphi} = e^{i(\theta - \varphi)}$ de donde

(0.5) $\theta - \varphi = \varphi + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \iff \theta = 2\varphi + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

P2. a) La resolución de $z^2+z+1=0$ es

$$z=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$ en donde $|z|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$

y los ángulos $\varphi_1=\frac{2\pi}{3}$, $\varphi_2=\frac{4\pi}{3}$.

(2.0) Entonces $z_1=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ y $z_2=e^{i\frac{4\pi}{3}}$

En ambos casos $z_1^3=\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3=e^{i2\pi}=1$

$$z_2^3=\left(e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)^3=e^{i4\pi}=1$$

(1.0) Es decir, z_1 y z_2 son raíces cúbicas de la unidad.

b) Primera forma.

$z\in\mathbb{C}-\{0\}$ y $\{z_0,z_1,\dots,z_{n-1}\}$ son raíces ene-ésimas de z

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{z_k}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\overline{z_k}}{z_k\overline{z_k}}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\overline{z_k}}{|z_k|^2}$$, pero $|z_k|=\sqrt[n]{|z|}=c^{te}=\rho$

(2.0) así $$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{z_k}=\frac{1}{\rho^2}\sum_{k=0}^{n-1}\overline{z_k}=\frac{1}{\rho^2}\overline{\sum_{k=0}^{n-1}z_k}$$ (conjugado de una suma es la suma de los conjugados)

y recordando que $\sum_{k=0}^{n-1}z_k=0$ se obtiene.

(1.0) $$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{z_k}=\frac{1}{\rho^2}\cdot\overline{0}=\frac{1}{\rho^2}\cdot 0=0$$

---

b) Otra forma

$z_k=\sqrt[n]{|z|}\,e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$, $k=0,1,\dots n-1 \Rightarrow z_k=\rho e^{i\frac{\varphi}{n}}\cdot e^{i\frac{2\pi}{n}k}$

en que $\rho e^{i\frac{\varphi}{n}}=z_0 \wedge e^{i\frac{2k\pi}{n}}=w_k=$ raíces enésimas de la unidad

Entonces $z_k=z_0\cdot w_k$ $\quad k=0,1,\dots,n-1$

(2.0) Así $$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{z_k}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{z_0w_k}=\frac{1}{z_0}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{w_k}$$

Pero $$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{w_k}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\overline{w_k}}{\underbrace{|w_k|^2}_{1}}=\sum_{k=0}^{n-1}\overline{w_k}=\overline{\sum_{k=0}^{n-1}w_k}=\overline{0}=0$$

(1.0) Se concluye que $$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{z_k}=\frac{1}{z_0}\cdot 0=0$$