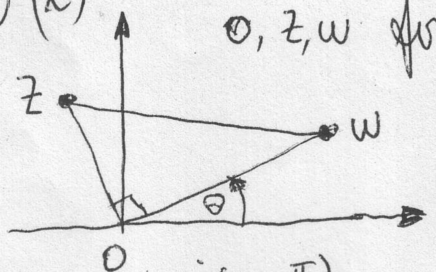
Introducción al Álgebra - Control 6 (2013-1)

Pauta Problema 1

a) (i)



$0, z, w$ forman un triángulo rectángulo en 0

Claramente $\operatorname{Arg}(w) = \theta$ y $\operatorname{Arg}(z) = \theta + \frac{\pi}{2}$

Así, $w = |w| e^{i\theta}$ y $\overline{w} = |w| e^{i(-\theta)}$

1.0 $z = |z| e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}$; $\overline{z} = |z| e^{i(-\theta - \frac{\pi}{2})}$

Sigue que $\overline{z} w + z \overline{w} = |z| e^{i(-\theta - \frac{\pi}{2})} \cdot |w| e^{i\theta} + |z| e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})} |w| e^{i(-\theta)}$

1.0 $= |z||w| \cdot e^{i(-\frac{\pi}{2})} + |z||w| e^{i(\frac{\pi}{2})}$, así,

$$\overline{z} w + z \overline{w} = |z||w| \left(e^{i(-\frac{\pi}{2})} + e^{i\frac{\pi}{2}} \right) = |z||w| (-i + i) = |z||w| \cdot 0 = 0$$

ii) Verificar que $|z - w|^2 = |z|^2 + |w|^2$

En efecto $|z - w|^2 = (z - w)\overline{(z - w)} = (z - w)(\overline{z} - \overline{w})$

Por propiedad $t\overline{t} = |t|^2$ $= z\overline{z} + w\overline{w} - \underbrace{(w\overline{z} + \overline{w} z)}_{= 0 \text{ según (i)}} = |z|^2 + |w|^2$

2.0 Sigue que $|z - w|^2 = |z|^2 + |w|^2$

b) $$z = \frac{3}{2 + \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta}$$

Basta multiplicar por el conjugado del denominador.

Así, $$z = \frac{3}{2 + \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta} \cdot \frac{2 + \cos\theta - i \operatorname{sen}\theta}{2 + \cos\theta - i \operatorname{sen}\theta} = \frac{3(2 + \cos\theta) - (3 \operatorname{sen}\theta) i}{(2 + \cos\theta)^2 + \operatorname{sen}^2\theta}$$

1.0 $$= \frac{3(2 + \cos\theta) - (3 \operatorname{sen}\theta) i}{5 + 4\cos\theta} = \frac{3(2 + \cos\theta)}{5 + 4\cos\theta} - \frac{3 \operatorname{sen}\theta}{5 + 4\cos\theta} i$$

Sigue que $$\operatorname{Re}(z) = \frac{3(2 + \cos\theta)}{5 + 4\cos\theta}$$

1.0 $$\operatorname{Im}(z) = -\frac{3 \operatorname{sen}\theta}{5 + 4\cos\theta}$$

Pauta Problema 2

Sean $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ y $S_n = \{w \in \mathbb{C} / w^n = 1\}$

a) Demostrar que $(S_n, \cdot)$ es un subgrupo de $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$

Claramente S_n es el conjunto de las raíces ene-ésimas de la unidad. Así $w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$

Usaremos la propiedad compacta.

$S_n \neq \phi$ pués, al menos, $w_0 = 1 \in S_n$

1.0 Sean $w_{n_1}, w_{n_2} \in S_n$. Por demostrar que $w_{n_1} \cdot w_{n_2}^{-1} \in S_n$

En efecto, $w_{n_1} = e^{i\frac{2n_1\pi}{n}}$ y $w_{n_2} = e^{i\frac{2n_2\pi}{n}}$ de donde $w_{n_2}^{-1} = e^{i\frac{2(-n_2)\pi}{n}}$

Así, $w_{n_1} \cdot w_{n_2}^{-1} = e^{i\frac{2\pi}{n}(n_1 - n_2)}$ con $0 \leq n_2 \leq n_1 \leq n-1$, sin perder generalidad, así $0 \leq n_1 - n_2 \leq n-1$ y por lo tanto

2.0
$$w_{n_1} \cdot w_{n_2}^{-1} = e^{i\frac{2(n_1-n_2)\pi}{n}} \in S_n$$

b) Mostrar que $f : S_n \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ tal que $f\left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) = [k]_n$ con $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, es un isomorfismo.

<u>f es inyectiva</u>: Sean w_{n_1}, w_{n_2} tales que $f(w_{n_1}) = f(w_{n_2}) \Longleftrightarrow [n_1]_n = [n_2]_n$

$\Rightarrow n_1 \equiv_n n_2 \Rightarrow n_1 = n_2 + p \cdot n \quad p \in \mathbb{Z} \Rightarrow e^{i\frac{2n_1\pi}{n}} = e^{i\frac{2(n_2+pn)\pi}{n}} = e^{i\frac{2n_2\pi}{n}} \underbrace{e^{i\frac{2pn\pi}{n}}}_{1}$

$\Rightarrow e^{i\frac{2n_1\pi}{n}} = e^{i\frac{2n_2\pi}{n}} \Rightarrow w_{n_1} = w_{n_2}$

<u>f es sobreyectiva</u>: Sea $[k]_n \in \mathbb{Z}_n$ con $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Basta tomar $w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \in S_n$ para que $f(w_k) = f\left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) = [k]_n$.

<u>Morfismo</u> Sean $w_k, w_j \in S_n$. $f(w_k \cdot w_j) = f\left(e^{i\frac{2k\pi}{n}} \cdot e^{i\frac{2j\pi}{n}}\right) = f\left(e^{i\frac{2(k+j)\pi}{n}}\right) = [k+j]_n$

$= [k]_n +_n [j]_n = f(w_k) +_n f(w_j)$