Introducción al Álgebra (15-1)

Control 6 - Pauta Problema 1

a) Sean $z, w \in \mathbb{C}$ tales que $|z+w| = |z-w|$, $w \neq 0$

I) Demostrar que $R_e(z\bar{w}) = 0$

$|z+w| = |z-w| \Rightarrow |z+w|^2 = |z-w|^2 \Rightarrow (z+w)(\overline{z+w}) = (z-w)(\overline{z-w})$

$\Rightarrow (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = (z-w)(\bar{z}-\bar{w}) \Rightarrow \cancel{z\bar{z}} + \cancel{w\bar{w}} + z\bar{w} + w\bar{z} = \cancel{z\bar{z}} + \cancel{w\bar{w}} - z\bar{w} - w\bar{z}$

(1.5) $\Rightarrow 2(z\bar{w} + w\bar{z}) = 0 \Rightarrow z\bar{w} + w\bar{z} = 0$ pero $\overline{z\bar{w}} = w\bar{z}$

Entonces $z\bar{w} + w\bar{z} = 2R_e(z\bar{w}) = 0$. Sigue que $R_e(z\bar{w}) = 0$

(1.0) Se usaron en $\mathbb{C}$ las propiedades $|u|^2 = u\bar{u}$, $\overline{u \pm v} = \bar{u} \pm \bar{v}$ y $u + \bar{u} = 2R_e(u)$

II) Demostrar que $R_e\left(\frac{z}{w}\right) = 0$

En efecto $\frac{z}{w} = \frac{z}{w} \cdot \frac{\bar{w}}{\bar{w}} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2}$ con $|w|^2 \in \mathbb{R}$ y $R_e(\alpha u) = \alpha R_e(u)$

(1.5) así $R_e\left(\frac{z}{w}\right) = R_e\left(\frac{z\bar{w}}{|w|^2}\right) = \frac{1}{|w|^2} R_e(z\bar{w}) \xrightarrow{\text{Según I}} \frac{1}{|w|^2} \cdot 0 = 0$

b) Resuelva la ecuación $z^3 + i = 0$

$z^3 = -i$ donde $-i = 1 \cdot e^{i(-\pi/2)}$

(0.5) Entonces las raíces son $z_k = \sqrt[3]{1}\, e^{i\frac{2k\pi - \pi/2}{3}}$ con $k = 0, 1, 2$

así $z_0 = e^{i(-\pi/6)} = \cos(-\pi/6) + i\,\mathrm{sen}(-\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

$z_1 = e^{i\frac{2\pi - \pi/2}{3}} = e^{i(\pi/2)} = \cos(\pi/2) + i\,\mathrm{sen}\,\pi/2 = i$

$z_2 = e^{i\frac{4\pi - \pi/2}{3}} = e^{i\frac{7\pi}{6}} = \cos\underbrace{\frac{7\pi}{6}}_{\pi+\pi/6} + i\,\mathrm{sen}\underbrace{\frac{7\pi}{6}}_{\pi+\pi/6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

(1.5)

Pauta Problema 2

a) Usando el Teorema de la división, podemos escribir

$p(x) = q(x)\,d(x) + r(x)$ donde $q(x) \in \mathbb{R}[x]$ y $gr(r(x)) = 1 < gr(d(x)) = 2$

Sigue que $p(x) = a x^4 + b x^3 - 18x^2 + 15x - 5 = q(x)\overbrace{(x^2-3x+2)}^{d(x)} + \overbrace{4x-7}^{r(x)}$

Como $q(x) = x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ tiene a 1 y 2 como raíces

(1.5) se puede evaluar en $x=1$ y $x=2$. Entonces

$P(1) = a + b - 18 + 15 - 5 = q(1)\cdot 0 + 4 - 7 \Rightarrow a + b = 5$

$P(2) = 16a + 8b - 72 + 30 - 5 = q(2)\cdot 0 + 8 - 7 \Rightarrow \underline{16a + 8b = 48}$

$2a + b = 6$

(0.5) $\Rightarrow a = 1 \;,\; b = 4$

b) $A[x] \subseteq \mathbb{R}[x] \;,\; A[x] = \{ p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid p(3) = 0 \}$

I) $(A[x], +, \cdot)$ es anillo.

En efecto, $(A[x], +)$ es grupo abeliano: Es cerrado pues $\forall\, p(x), q(x) \in A[x]$, $(p(x)+q(x))(3) = p(3) + q(3) = 0 \Rightarrow (p+q) \in A[x]$

Cero $= 0$ (ó $0(x)$) que es el cero de los polinomios y $0(3) = 0$ y luego $0(x) \in A[x]$. Opuestos $p(3) = 0 \Rightarrow -p(3) = 0 \wedge p + -p = 0$

(1.5) La asociatividad (en +) y conmutatividad se heredan del anillo de los polinomios, lo mismo que la distributividad y también

(0.5) $A(x)$ es cerrado para $\cdot$ pues $(pq)(3) = p(3)q(3) = 0 \cdot 0 = 0$

II) ¿Es $(A[x], +, \cdot)$ anillo conmutativo? Si, herencia de $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$

¿Es anillo unitario? NO, $\mathbb{1}(x) = 1$ es la unidad pero $\mathbb{1}(3) = 1 \neq 0$

(1.0) ¿Tiene divisores del cero? NO si $p, q \in A[x] \setminus \{0\}$ y $p(x)\,q(x) = 0$ necesariamente $p(x) = 0 \vee q(x) = 0 \;\forall x$ lo cual no se cumple.

(1.0) III) $p(x) \in A[x] \Leftrightarrow p(3) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{3 \text{ es raíz de } p(x)}_{\text{Definición}} \Leftrightarrow \underbrace{(x-3) \mid p(x)}_{\text{Propiedad}}$