Control 6

P1.

(a) (3.0 ptos.) Sea $a \in \mathbb{R}$, fijo. Se define la función $\varphi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ por $\varphi(P) = P(a), \ \forall P \in \mathbb{R}[x]$.
Demuestre que φ es un homomorfismo sobreyectivo entre los anillos $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ y $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.
¿Es φ un isomorfismo?. Justifique.

(b) (3.0 ptos.) Se desea probar, sin inducción, que $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}, \ \forall n \in \mathbb{N}$.
Para esto considere las dos formas del polinomio $(1+x)^{2n} = (1+x)^n \cdot (1+x)^n$ y concluya.

P2.

(a) (3.0 ptos.) Considere los complejos $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $w = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Encontrar el menor $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $z^n = w^n = 1$

(b) En el esquema de la figura, presentado en el plano complejo, los puntos P, A, B y C están en una horizontal.
Considere los complejos $z_A(0A)$, $z_B(0B)$ y $z_C(0C)$.

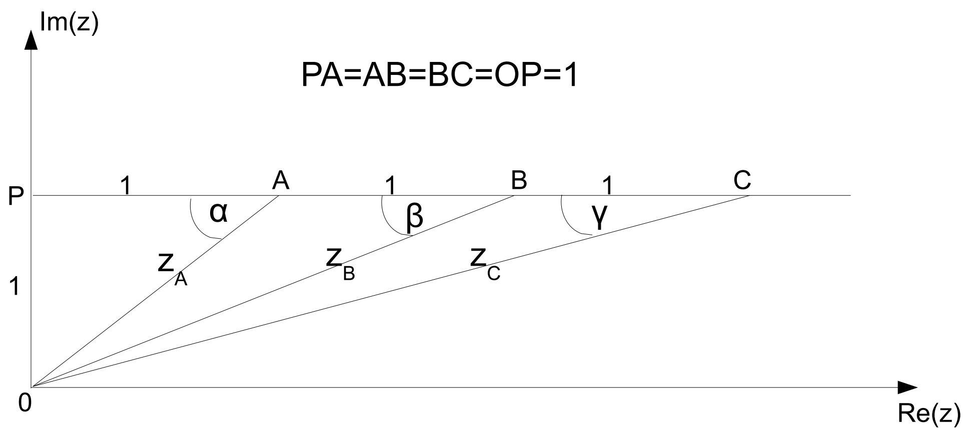

Figura 1: Plano Complejo

(i) (1.0 pto.) Escriba los complejos z_A, z_B y z_C en forma cartesiana y en forma polar y en este último caso, en función de los ángulos α, β y γ señalados (no se pide calcular α, β y γ sino que usarlos en la versión polar de cada complejo).

(ii) (2.0 ptos.) Usando álgebra de números complejos, pruebe que α, β y γ satisfacen la relación $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$.

Tiempo: 1.15 horas.