Control 6

P1. a) Sean $z, w \in \mathbb{C}$ tales que $|z+w| = |z-w|$, con $w \neq 0$.

- I) (2.5 ptos) Demuestre que $\mathrm{Re}(z\bar{w}) = 0$
- II) (1.5 ptos) Demuestre que $\mathrm{Re}(\frac{z}{w}) = 0$

b) (2.0 ptos.) Resuelva la ecuación $z^3 + i = 0$

P2. a) (2.0) Considere los polinomios $p(x), d(x), r(x) \in \mathbb{R}[x]$, definidos por:

$$
\begin{aligned}
p(x) &= ax^4 + bx^3 - 18x^2 + 15x - 5 \\
d(x) &= x^2 - 3x + 2 \\
r(x) &= 4x - 7
\end{aligned}
$$

Si el resto de dividir $p(x)$ por $d(x)$ es $r(x)$, determine los valores reales a y b.

b) Se define $A[x] \subseteq \mathbb{R}[x]$ por:

$$A[x] = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] | p(3) = 0\}$$

- I) (2.0 ptos.) Demuestre que $(A[x], +, \cdot)$ es un anillo, donde $+, \cdot$ son la suma y producto habituales de polinomios.
- II) (1.0 ptos) ¿ Es $(A[x], +, \cdot)$ un anillo conmutativo? ¿ Es $(A[x], +, \cdot)$ un anillo unitario? ¿ Tiene $(A[x], +, \cdot)$ divisores de cero?
- III) (1.0 ptos) Demuestre que $p(x) \in (A[x], +, \cdot) \iff \exists q(x) \in (\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ tal que $p(x) = (x-3)q(x)$

Tiempo: 1 hora 15 minutos.