Introducción al Álgebra (MA1101)

Control 6 - Pauta Problema 1

a) Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Demostrar que

i) $(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1} z_2) \in \mathbb{R}$

En efecto, $z_1\overline{z_2}$ es conjugado de $\overline{z_1} z_2$ pues $\overline{\overline{z_1} z_2} = z_1\overline{z_2}$

1.0 Así, $z_1\overline{z_2} + \overline{z_1} z_2 = z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}} = 2R_e(z_1\overline{z_2}) \in \mathbb{R}$

ii) $|z_1|^2 + |z_2|^2 \geq z_1\overline{z_2} + \overline{z_1} z_2$

En efecto, según (i) $z_1\overline{z_2} + \overline{z_1} z_2 = 2R_e(z_1\overline{z_2}) \leq 2|z_1\overline{z_2}|$

1.0 (por propiedad $R_e(z) \leq |z|$). Además $2|z_1\overline{z_2}| = 2|z_1||\overline{z_2}| = 2|z_1||z_2|$

por propiedades $|zw| = |z||w| \wedge |\overline{z}| = |z|$. Sigue que

$$z_1\overline{z_2} + \overline{z_1} z_2 \leq 2|z_1||z_2| \leq |z_1|^2 + |z_2|^2$$ donde se

1.0 usó que $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad 2ab \leq a^2 + b^2$

b) i) Solución de $w^n = -1$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

Para el complejo $z = -1$, $|z| = |-1| = 1$ y $\arg(-1) = \pi$, así $-1 = e^{i\pi}$

1.0 Entonces las soluciones de $w^n = -1$ son $w_k = e^{i\frac{2k\pi + \pi}{n}}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$

ii) $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$ y $\overline{z} \neq -1$. Resolver $\left(\frac{1+z}{1+\overline{z}}\right)^n = -1$

Según la indicación, usar (i) sugiere reemplazar $\frac{1+z}{1+\overline{z}} = w$

de donde, como $\overline{z} \neq -1$, $1 + z = (1+\overline{z})w = w + \overline{z}w \quad / \cdot z$

$$\Rightarrow z(1+z) = wz + \overline{z}zw = wz + \underbrace{|z|^2}_{1} w = w(z+1)$$

1.5 Como $\overline{z} \neq -1$, $z \neq -1 \Rightarrow z\cancel{(1+z)} = w\cancel{(z+1)} \Rightarrow z = w$

de modo que $\left(\frac{1+z}{1+\overline{z}}\right)^n = -1 \Rightarrow z^n = -1$ tal como en (i).

0.5 Así $z_k = e^{i\frac{2k\pi + \pi}{n}}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$

Pauta Problema 2

a) $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$, $|w_1| = |w_2| = 1$ y $w_1 + w_2 = -1$

i) Probar que $w_1 = \overline{w_2}$

w_1 y w_2 son complejos unitarios ($|w_1| = |w_2| = 1$) y por lo tanto se pueden escribir como $w_1 = e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$, $w_2 = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi$, entonces como $w_1 + w_2 = -1 \Rightarrow \cos\theta + \cos\varphi + i(\mathrm{sen}\,\theta + \mathrm{sen}\,\varphi) = -1$, entonces

$\cos\theta + \cos\varphi = -1 \wedge \mathrm{sen}\,\theta + \mathrm{sen}\,\varphi = 0$ de donde $\mathrm{sen}\,\theta = -\mathrm{sen}\,\varphi = \mathrm{sen}(-\varphi)$

Así, $\theta = \begin{cases} 2k\pi - \varphi \\ \vee \\ (2k+1)\pi + \varphi \end{cases}$ Si $\theta = (2k+1)\pi + \varphi$, entonces $\cos\theta + \cos\varphi =$

1.0

$= \cos[(2k\pi+1)\pi + \varphi] + \cos\varphi = -\cos\varphi + \cos\varphi = 0 \neq -1$
$\Rightarrow$ NO ES POSIBLE.

Pero si $\theta = 2k\pi - \varphi \Rightarrow \cos(2k\pi - \varphi) + \cos\varphi = \cos\varphi + \cos\varphi = 2\cos\varphi = -1$ y en ese caso es posible. Así $\theta = 2k\pi - \varphi$ y como argumento principal, $k = 0$, $\theta = -\varphi$

1.0

Así, $w_1 = e^{i\theta} = e^{i(-\varphi)} = \overline{e^{i\varphi}} = \overline{w_2}$

ii) Mostrar que $w_0 = 1$, w_1 y w_2 son raíces cúbicas de 1

Trivialmente $w_0 = 1$ es raíz cúbica de 1 ($w_0^3 = 1^3 = 1$)

1.0

Del punto (i) $2\cos\varphi = -1 \Rightarrow \cos\varphi = -\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3} = -\theta$

Así, $w_1 = e^{i\theta} = e^{-\frac{2\pi}{3}i} \wedge w_2 = e^{i\varphi} = e^{\frac{2\pi}{3}i}$, en ambos casos

$w_1^3 = w_2^3 = \left[e^{\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right)i}\right]^3 = e^{\pm 2\pi i} = \cos 2\pi \pm i\,\underbrace{\mathrm{sen}\,2\pi}_{0} = 1$ de modo que

1.0

son raíces cúbicas de la unidad.

iii) $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ con $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ y $z_1 + z_2 + z_3 = 0$

Dividiendo por z_3 se puede escribir $\frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_3} = -1$ y además

$\left|\frac{z_1}{z_3}\right| = \frac{|z_1|}{|z_3|} = 1 \wedge \left|\frac{z_2}{z_3}\right| = \frac{|z_2|}{|z_3|} = 1$. Así, $\frac{z_1}{z_3}$ y $\frac{z_2}{z_3}$ cumplen las condiciones

1.5

de w_1 y w_2 del punto anterior, es decir son raíces de la unidad.

0.5

Sigue que $\frac{z_1}{z_3}, \frac{z_2}{z_3} = w_k \Rightarrow z_k = w_k e^{i\theta}$, $k = 0,1,2$ con $e^{i\theta} = z_1, z_2$ ó z_3 algún θ.