Control 6

P1. a) (3,0 ptos.) Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| = 1$ y $z^{2n} \neq -1$. Demuestre que

$$\frac{z^n}{1 + z^{2n}} \in \mathbb{R}.$$

b) (3,0 ptos.) Sean $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{N}$. Se define

$$s_1 = a_1^2 + b_1^2$$
$$s_2 = a_2^2 + b_2^2$$

Demuestre que existen $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que

$$s_1 \cdot s_2 = m^2 + n^2.$$

Indicación: Defina $z_1 = a_1 + ib_1 \in \mathbb{C}$.

P2. a) (3,0 ptos.) Escriba en forma cartesiana y polar el complejo

$$\frac{z_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)}{z_2 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)}$$

donde $|z_1| = 3$, $|z_2| = 2$, $\arg z_1 = \frac{\pi}{4}$, $\arg z_2 = \frac{\pi}{2}$.

b) (3,0 ptos.) Sean $z_0, \ldots, z_{n-1}$ las n raíces n-ésimas de la unidad, ordenadas de manera usual (es decir, según argumento creciente. Demuestre que

$$z_0 \cdot z_1 + z_1 \cdot z_2 + \ldots + z_{n-2} \cdot z_{n-1} + \mathbf{z_{n-1}} \cdot \mathbf{z_0} = 0.$$

Indicación: Le puede ser útil hacer primero el caso $n = 3$.

Consultas sólo al auxiliar
Justifique cada uno de sus pasos
Tiempo: 1:15