Control 6

P1. a) Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Demuestre que

(i) (1,0 pto.) $(z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2) \in \mathbb{R}$

(ii) (2,0 ptos.) $|z_1|^2 + |z_2|^2 \geq z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2$

b) (i) (1,0 pto.) Encuentre las soluciones de la ecuación

$$w^n = -1, \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$$

(ii) (2,0 ptos.) Considere los complejos $z \in \mathbb{C}$ tales que $|z| = 1$ y $\overline{z} \neq -1$. Use (i) para resolver la ecuación

$$\left(\frac{1+z}{1+\overline{z}}\right)^n = -1, \quad n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$$

P2. a) Sean $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ tales que $|w_1| = |w_2| = 1$ y $w_1 + w_2 = -1$.

(i) (2,0 ptos.) Pruebe que $w_1 = \overline{w}_2$

(ii) (2,0 ptos.) Muestre que $w_0 = 1$ y que los complejos w_1 y w_2 del punto (i), son las raíces cúbicas de la unidad

b) (2,0 ptos.) Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ tales que $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ y $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Demuestre que $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tal que $z_k = w_k \cdot e^{i\theta}$, $k = 0, 1, 2$, donde w_k, $k = 0, 1, 2$ son los complejos del punto a) (ii) anterior.

Consultas sólo al auxiliar de control
Justifique cada uno de sus pasos
Tiempo: 1:15