

P1 /

Sea $z \neq 0$, $|z|=1$ $\wedge |z+1|=1$

PDQ: $z^3=1$

Como tenemos información de una SUMA
Lo MÁS RECOMENDABLE ES TRABAJAR
CON LA FORMA CARTESIANA.

Sea $z = a + bi$

como $|z|=1 \Rightarrow \sqrt{a^2+b^2}=1 \Rightarrow a^2+b^2=1$

consideremos ahora

$z+1 = a + bi + 1 = a+1 + bi$

como $|z+1|=1 \Rightarrow \sqrt{(a+1)^2+b^2}=1 \Rightarrow (a+1)^2+b^2=1$

OJO! Cuando uno calcula el
módulo lo que uno hace es

$\sqrt{\text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2}$

Con $\text{Re}(z) = \underline{\text{TODO}}$ lo que NO TENGA "i"

$\text{Im}(z) = \underline{\text{TODO}}$ lo que ACOMPANE AL "i"

ES SUPER IMPORTANTE TENER EN
CUENTA QUE TANTO $\text{Re}(z)$ como $\text{Im}(z)$
SON REALES

$(\text{Im}(a+bi) = b \text{ (NO! } bi))$

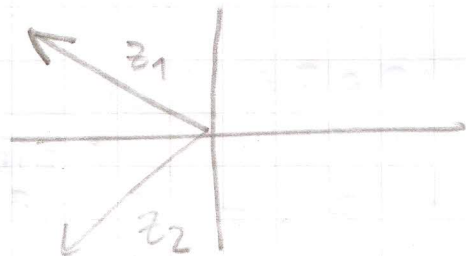
Volviendo al ejercicio.

$$\left. \begin{array}{l} a^2 + b^2 = 1 \\ a^2 + 2a + 1 + b^2 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 2a + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} + b^2 = 1 \Rightarrow \boxed{b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\Rightarrow z = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} (z_1)$$

$$\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} (z_2)$$



Veamos ahora que $z^3 = 1$
 Como se trata de multiplicaciones
 lo RECOMENDABLE ES TRABAJARLO EN
 FORMA POLAR,

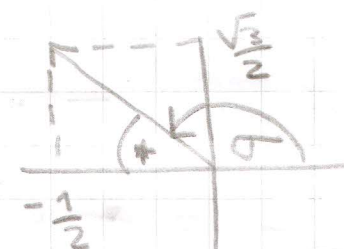
$$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \rightarrow R e^{i\sigma}$$

$$z_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \rightarrow R_2 e^{i\alpha}$$

Notemos que $R = R_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$

(NO ERA NECESARIO CALCULARLO PUES
 sabemos que $|z| = 1$ (NUNCA ESTÁ
 DE MÁS CHEQUEAR))

Para el ángulo $\sigma =$



$$\tan \sigma = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

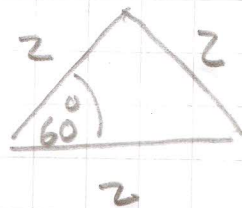
$$\Rightarrow \sigma = 120^\circ$$

(otra forma de verlo es $\sigma = 180 - \star$)

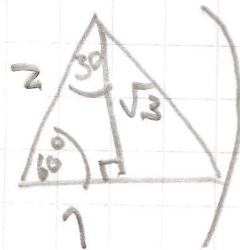
$$\tan \star = \frac{\sqrt{3}}{2} \div \frac{1}{2} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \star = 60^\circ$$

(FORMA ÚTIL
DE SABERSE
LOS ÁNGULOS BÁSICOS



$\Rightarrow$

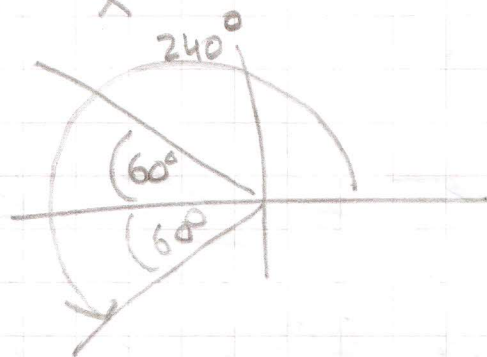


$$\Rightarrow z_1 = e^{i120} ! \quad \underline{\underline{NO}}$$

SE TRABAJA EN RADIANES ($180^\circ = \pi$)

$$\Rightarrow \underline{z_1 = e^{i \frac{2\pi}{3}}}$$

PARA z_2 SE PUEDE HACER TODO EL CÁLCULO DENUEVO O DARSE CUENTA QUE ES EL SIMÉTRICO CON RESPECTO AL EJE X
 $\Rightarrow$



$$\Rightarrow z_2 = e^{i \frac{4\pi}{3}} \quad \left(\text{TAMBIÉN SE PUEDE CONSIDERAR EL ÁNGULO NEGATIVO } -\frac{2\pi}{3} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{finalmente } z_1^3 &= \left(e^{i \frac{2\pi}{3}} \right)^3 = e^{i 2\pi} = 1 = \\ z_2^3 &= \left(e^{i \frac{4\pi}{3}} \right)^3 = e^{i 4\pi} = 1 = \end{aligned}$$

(OTRA FORMA DE HACERLO ERA CALCULAR LAS RAÍCES CÚBICAS DE LA UNIDAD Y NOTAR QUE ERAN z_1 Y z_2)

RECORDAR que w es raíz n -ésima
de z si

$$w^n = z \quad \text{si} \quad w = R e^{i\alpha} \\ z = R_2 e^{i\beta}$$

$$\Rightarrow (R e^{i\alpha})^n = R_2 e^{i\beta}$$

$$\Rightarrow R^n e^{i\alpha n} = R_2 e^{i\beta}$$

$$\Rightarrow R^n = R_2 \quad \wedge \quad e^{i\alpha n} = e^{i\beta}$$

$$\Rightarrow R = \sqrt[n]{R_2} \quad \wedge \quad \alpha n = \beta + \underline{\underline{2k\pi}} \quad k \in \{0, \dots, n-1\}$$

$$\Rightarrow \boxed{R = \sqrt[n]{R_2}} \quad \wedge \quad \boxed{\alpha = \frac{\beta + 2k\pi}{n}}$$

En particular si $z=1$

$$\Rightarrow z = 1 \cdot e^{i \cdot 0}$$

$$\Rightarrow R = \sqrt[n]{1} = 1$$

$$\alpha = 0 + \frac{2k\pi}{n} = \frac{2k\pi}{n} \quad k \in \{0, \dots, n-1\}$$

$\Rightarrow$ si BUSCAMOS LAS RAICES CUBICAS $n=3$

$$\Rightarrow w_1 = e^{i \frac{2\pi}{3} \cdot 0} = 1$$

$$w_2 = e^{i \frac{2\pi}{3} \cdot 1} = e^{i \frac{2\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$w_3 = e^{i \frac{2\pi}{3} \cdot 2} = e^{i \frac{4\pi}{3}} = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \\ = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

P2) Si $w^3 = 1$ con $w \neq 1$

$$\Rightarrow (1+w)^3 + (1+w^2)^3 + (1+w^3)^3 = 62$$

De la pregunta anterior

$$w^3 = 1 \Rightarrow w = e^{i \frac{2\pi}{3}} \vee w = e^{i \frac{4\pi}{3}} \quad (w_1) \quad (w_2)$$

$$\Rightarrow w^2 = e^{i \frac{4\pi}{3}} \vee w^2 = e^{i \frac{8\pi}{3}}$$

↑
ES LA
SEGUNDA
OPCIÓN.

↑
¿ ES LA
PRIMERA,
OPCIÓN?

Si PUES

$$e^{i \frac{2\pi}{3}} = e^{i \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi \right)}$$

$\Rightarrow$ Da lo mismo
AL ELEVARLA AL
CUBO LA OTRA!

QUE RAÍZ SEA
CUADRADO

ADemás LA SUMA DE LAS
RAICES SIEMPRE DA CERO!

$$\Rightarrow 1 + w_1 + w_2 = 0$$

$$\Rightarrow 1 + w_2 = -w_1 \quad \wedge \quad 1 + w_1 = -w_2$$

$$\text{Si } w = w_1$$

$$\Rightarrow (1+w)^3 + (1+w^2)^9 + (1+w^3)^6$$

$$= (-w_2)^3 + (1+w_2)^9 + (1+1)^6$$

$$= -1 + ((-w_1)^3)^3 + 64$$

$$= -1 + (-1)^3 + 64$$

$$= -2 + 64$$

$$= 62 //$$

Si $w = w_2$ ES LO MISMO,
CAMBIANDO w_1 POR w_2 $\wedge$ VICEVERSA.

P3 a) De la P1 sabemos como sacar raíces n -ésimas

como $-1 = e^{i\pi}$

$$\Rightarrow W = e^{i \frac{(\pi + 2k\pi)}{n}} //$$

b) Si uno se fija el caso (b) es un caso particular de (a) si uno llama

$$W = \frac{1+z}{1+\bar{z}}$$

la ec queda $W^n = -1$
que es EXACTAMENTE LA DE (a)

AHORA BIEN EN GENERAL
SI UNO TIENE INFO SOBRE $|z|$
Y HAY UN $\bar{z}$ SIEMPRE SE USA QUE

$$|z|^2 = z \bar{z} \Rightarrow \bar{z} = \frac{|z|^2}{z}$$

EN ESTE CASO $|z| = 1$

$$\Rightarrow w = \frac{1+z}{1+\bar{z}} = \frac{1+z}{1+\frac{1}{z}} = z \left(\frac{1+z}{1+z} \right)$$

1 (PUES $z \neq -1$)

$$\Rightarrow \boxed{w = z}$$

OTO REVISAR QUE
NO ESTOY DIV. POR CERO.

$\Rightarrow$ LA SOLUCIÓN TAMBIÉN ES

$$e^{i \frac{(\pi + 2k\pi)}{n}}$$

P4) PRIMERO RECORDEMOS QUG

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$$

$$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$$

$$z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$$

$$z - \overline{z} = 2 \operatorname{Im}(z) i$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3} - i}{2} \right)^{2n} - \left(\frac{\sqrt{3} + i}{2} \right)^{2n}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3} - i}{2} \right)^{2n} - \left(\frac{\overline{\sqrt{3} - i}}{2} \right)^{2n}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3} - i}{2} \right)^{2n} - \overline{\left(\frac{\sqrt{3} - i}{2} \right)^{2n}}$$

$$= 2 \operatorname{Im} \left(\left(\frac{\sqrt{3} - i}{2} \right)^{2n} \right) i$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{3}$$

NO HAY SOLUCIÓN
IGUALANDO UN
UN IMAGINARIO

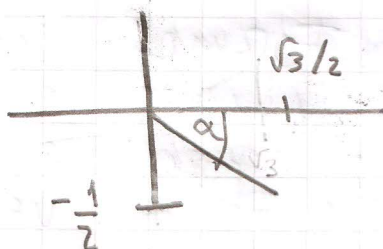
PUEDES ESTARIAS
NÚMERO REAL A
(QUE NO ES 0)

$\Rightarrow a = \sqrt{3}i$ ES EL ÚNICO CASO INTERESANTE.

$$\Rightarrow 2 \operatorname{Im} \left(\left(\frac{\sqrt{3} - i}{2} \right)^{2n} \right) = \sqrt{3}$$

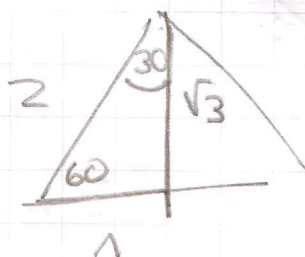
$$\Rightarrow \operatorname{Im} \left(\left(\frac{\sqrt{3} - i}{2} \right)^{2n} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3} - i}{2} =$$



$$\alpha = \arctan \left(\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right)$$

$$\alpha = \arctan \left(\frac{-1}{\sqrt{3}} \right)$$



$$\alpha = 30^\circ = \frac{\pi}{6} \quad \text{OJO CON EL "-"} \quad \swarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3} - i}{2} = e^{i \left(-\frac{\pi}{6} \right)}$$

$$\operatorname{Im} \left(\left(e^{i \left(-\frac{\pi}{6} \right)} \right)^{2n} \right) = \operatorname{Im} \left(e^{i \left(-\frac{\pi n}{3} \right)} \right)$$

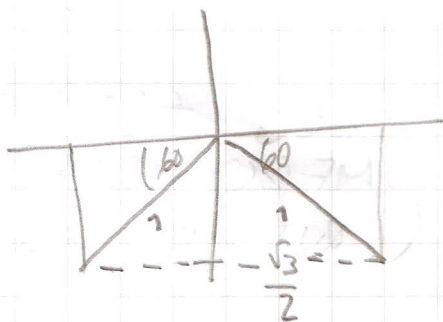
$$= \operatorname{Im} \left(\cos \left(-\frac{\pi n}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi n}{3} \right) \right)$$

$$= \sin \left(-\frac{\pi n}{3} \right) = -\sin \left(\frac{\pi n}{3} \right)$$

$\Rightarrow$ LA EC. QUE NOS QUEDA ES

$$\sin \left(\frac{\pi n}{3} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

2 ejemplos que $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ tiene 2 soluciones



$$\Rightarrow \frac{\pi n}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2K\pi \quad \vee \quad \frac{\pi n}{3} = \frac{\pi + \pi}{3} + 2K\pi$$

$$\Rightarrow \boxed{n = -1 + 6K} \quad \vee \quad \boxed{n = 4 + 6K}$$

(HAY UNA FORMA COMPACTA DE ESCRIBIR AMBAS SOLUCIONES $(-1)^n$ PERO YO CREO QUE ES MÁS FÁCIL VER AMBAS POR SEPARADO).

PS) USANDO ARGUMENTOS DE LA P3 Y P4

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{z_k} \cdot \frac{\bar{z}_k}{z_k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\bar{z}_k}{|z_k|^2}$$

NOTAR QUE TODAS LAS RAÍCES SIEMPRE TIENEN EL MISMO MÓDULO $\Rightarrow$ ES CTE Y SALE DE LA SUMATORIA

$$= \frac{1}{|z_1|} \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}_k = \frac{1}{|z_1|} \overline{\sum_{k=0}^{n-1} z_k} = \frac{1}{|z_1|} 0 = 0$$

PODRÍA SER CUALQUIERA $z_1 \vee z_2 \vee z_3 \vee \dots \vee z_{n-1}$