MA1101-5-7 Introducción al Álgebra
Profesores: Maya Stein - José Soto
Auxiliares: Juan Pedro Ross - Ilana Mergudich
Fecha: Martes 21 de Junio

Auxiliar 12: Complejos

- Si $z = a + ib$, entonces $z = \rho e^{i\phi}$, con $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\phi = arg(z) = \{$ángulo de rotación$\}$
- Si $z = \rho e^{i\phi}$, entonces $z = \rho[\cos(\phi) + i\,\text{sen}(\phi)]$
- $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
- $Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ también $Im(Z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z} \Leftrightarrow Re(z) = z \Leftrightarrow Im(z) = 0$
- Las raíces n-ésimas de la unidad son: $w_k = e^{\frac{2\pi k}{n}}$, con $k = 0, ..., n-1$.
- Dado $w \in \mathbb{C}$ fijo, las soluciones de la ecuación $z^n = w$ son $\sqrt[n]{|w|}w_k e^{\frac{i \cdot arg(w)}{n}}$, con $k = 0, ..., n-1$, donde los w_k son las raíces n-ésimas de la unidad.
- La suma de las raíces n-ésimas de la unidad es cero.

P1. Sea $z \in \mathbb{C}$ un número complejo que satisface las propiedades: $|z| = 1$ y $|z+1| = 1$. Prueba que z es raíz cúbica de la unidad.

P2. Sea $w \in \mathbb{C}$ una raíz cúbica de la unidad, con $w \neq 1$. Prueba que

$$(1+w)^3 + (1+w^2)^9 + (1+w^3)^6 = 62$$

P3. *a)* Encuentre las soluciones de la ecuación

$$w^n = -1, \qquad n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

b) Considere los complejos $z \in \mathbb{C}$ tales que $|z| = 1$ y $\overline{z} \neq -1$. Use (a) para resolver la ecuación

$$\left(\frac{1+z}{1+\overline{z}}\right)^n = -1, \qquad n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

P4. Encuentra los valores de $n \in \mathbb{N}$ que resuelven la ecuación

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{2n} - \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{2n} = a.$$

Para $a = \sqrt{3}, i\sqrt{3}$.

P5. Sean $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, un complejo dado, $n \geq 2$ $\{z_0, ..., z_{n-1}\}$ las raíces n-ésimas de z. Calcule:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{z_k}$$