PAUTA AMIGABLE C5

P1] I) 1) P.D.Q $f(0_K) = 0_A$

¿qué sabemos de f? ¡Es morfismo!

entonces $f(a+b) = f(a) \oplus f(b)$

¿cómo podemos usar esto? Escribamos el 0_K como una suma $0_K = 0_K + 0_K$

pq es morfismo

$$\Rightarrow f(0_K) = f(0_K + 0_K) = f(0_K) \oplus f(0_K)$$

$$\cancel{f(0_K)} = f(0_K) \oplus \cancel{f(0_K)} \quad / \oplus\ -f(0_K)$$

(el inverso existe porque es grupo)

$$\boxed{0_A = f(0_K)}$$

2) ¿qué sabemos ahora? f es morfismo y $f(0_K) = 0_A$

P.D.Q $\forall x \in K \quad f(-x) = -f(x)$

Entonces nos vamos a tener que armar una suma y meter el 0_K de alguna forma.

En efecto: $x + -x = 0_K$

$$\Rightarrow f(x + -x) = f(0_K) = 0_A$$

pero $f(x + -x) = f(x) + f(-x)$

$$\Rightarrow f(x) + f(-x) = 0_A \quad / -f(x)$$

$$\Leftrightarrow f(-x) = -f(x) \quad //$$

3) P.D.Q $(f(K), \oplus)$ es subgrupo de $(A, \oplus)$

* $f(K)$ = "imagen de K" =

usemos la propiedad compacta:

a) P.D.Q $f(K) \neq \emptyset$

ya vimos que $f(0_K) = 0_A$

$$\Rightarrow 0_A \in f(K)$$

$$\Rightarrow f(K) \neq \emptyset$$

b) P.D.Q $\forall x, y \in f(K)$ $\quad x \oplus -y \in f(K)$

como $x \in f(K)$, $\exists \bar{x} \in K$ tal que $f(\bar{x}) = x$
como $y \in f(K)$, $\exists \bar{y} \in K$ tal que $f(\bar{y}) = y$

Tenemos que ver entonces que $f(\bar{x}) \oplus -f(\bar{y}) \in f(K)$

Pero $f(\bar{x}) \oplus -f(\bar{y}) = f(\bar{x}) \oplus f(-\bar{y})$ (por (2))
$= f(\bar{x} + -\bar{y})$ (pq' es morfismo)

sabemos que $\bar{x} \in K$ y como $(K, +, \cdot)$ es cuerpo, $(K, +)$ es grupo abeliano y por lo tanto, como $\bar{y} \in K$, $-\bar{y} \in K$.
Si $\bar{x} \in K$ y $-\bar{y} \in K$, $(\bar{x} + -\bar{y}) \in K$
$\therefore f(\bar{x} + -\bar{y}) \in f(K)$.
$\therefore (f(K), \oplus)$ es subgrupo de $(A, \oplus)$

II) P.D.Q. $f(x) = 0_A \iff x = 0_K$

INTUICIÓN
¿qué no hemos usado? que $(K, +, \cdot)$ es cuerpo y $f(1_K) = 1_A$

$\Leftarrow]$ Demostrado en I) 1)
$\Rightarrow]$ P.D.Q $\underbrace{f(x) = 0_A}_{V} \Rightarrow \underbrace{x = 0_K}_{F}$

Por contradicción, supongamos $x \neq 0_K$. Como $(K, +, \cdot)$ es cuerpo y $x \neq 0_K$, $\exists x^{-1}$.

Además tenemos que $f(x) = 0_A$ $\;\odot f(x^{-1})$
$\iff f(x) \odot f(x^{-1}) = 0_A$ (0_A es absorbente)
$\iff f(x \cdot x^{-1}) = 0_A$ (porque es morfismo)
$\iff f(1_K) = 0_A$ $\rightarrow\!\leftarrow$
Por enunciado $f(1_K) = 1_A$.

$\therefore f(x) = 0_A \Rightarrow x = 0_K$

$\therefore f(x) = 0_A \iff x = 0_K$ //

III) P. D. Q $f(x)$ es inyectiva

$\Leftrightarrow$ P. D. Q $\forall x, y \in K \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

En efecto: $f(x) = f(y) \quad / \oplus -f(y)$

$\Leftrightarrow \quad f(x) \oplus -f(y) = 0_A$

$\Leftrightarrow \quad f(x) \oplus f(-y) = 0_A$ (por (I 2))

$\Leftrightarrow \quad f(x + -y) = 0_A$ (morfismo)

Pero de (II) tenemos que $f(m) = 0_A \Leftrightarrow m = 0_K$

entonces necesariamente $x + -y = 0 \quad / + y$

$x = y$ //

$\therefore$ f es inyectiva.

P2) I) Nos dicen que f es una biyección, ahora sólo tenemos que ver que son morfismos.

a) P. D. Q: f es morfismo de $(\mathbb{R}, *)$ en $(\mathbb{R}, +)$

$\Leftrightarrow$ P. D. Q $f(x * y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

En efecto. $f(x*y) = f(\sqrt[5]{x^5+y^5}) = (\sqrt[5]{x^5+y^5})^5$

$= x^5 + y^5 = f(x) + f(y)$ //

b) P. D. Q: f es morfismo de $(\mathbb{R}, \cdot)$ en $(\mathbb{R}, \cdot)$

$\Leftrightarrow$ P. D. Q: $f(xy) = f(x) \cdot f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

En efecto $f(xy) = (x \cdot y)^5 = x^5 y^5 = f(x) \cdot f(y)$ //.

II) P. D. Q: $(\mathbb{R}, *, \cdot)$ es cuerpo

$\Leftrightarrow$ P. D. Q $(\mathbb{R}, *)$ es grupo abeliano, $\cdot$ asocia, tiene neutro, conmuta y distribuye con respecto a $*$ y todos menos el 0 tienen inverso para $\cdot$

a) P. D. Q: $(\mathbb{R}, *)$ es grupo abeliano

i) P. D. Q $*$ conmuta

En efecto: $x * y = \sqrt[5]{x^5+y^5} = \sqrt[5]{y^5+x^5} = y * x$ ✓

ii) P. D. Q $\exists$ neutro

en efecto: 0 es neutro ya que

$x * 0 = \sqrt[5]{x^5+0} = \sqrt[5]{x^5} = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ //

iii) P.D.Q: todos tienen inverso

En efecto: $-x$ es inverso de x $\forall x \in \mathbb{R}$ ya que

$$x * -x = \sqrt[5]{x^5 + (-x)^5} = \sqrt[5]{x^5 - x^5} = \sqrt[5]{0} = 0 \;//$$

iv) P.D.Q: $*$ asocia $((x*y)*z = x*(y*z))$

En efecto: $(x*y)*z = \sqrt[5]{x^5+y^5} * z = \sqrt[5]{(\sqrt[5]{x^5+y^5})^5 + z^5} = \sqrt[5]{x^5+y^5+z^5}$

$$= \sqrt[5]{x^5 + (y^5+z^5)} = \sqrt[5]{x^5 + (\sqrt[5]{y^5+z^5})^5} = x * (y*z) \;//$$

$\therefore$ $(\mathbb{R}, *)$ es grupo abeliano.

Como $\cdot$ es la multiplicación en los reales, claramente asocia y todos menos el 0 tienen inverso. Además conmuta y tiene neutro (1)

Solo falta ver que distribuye con respecto a $*$ $\left(x \cdot (y*z) = xy * xz \right)$

En efecto: $x \cdot (y*z) = x \sqrt[5]{y^5+z^5} = \sqrt[5]{x^5} \sqrt[5]{y^5+z^5} = \sqrt[5]{x^5y^5 + x^5z^5}$

$$= \sqrt[5]{(xy)^5 + (xz)^5} = xy * xz \;//$$

$\therefore$ $(\mathbb{R}, *, \cdot)$ es cuerpo.