MA1101-7 Introducción al Álgebra
Profesor: Maya Stein
Auxiliar: Juan Pedro Ross
Fecha: Jueves 2 de Junio del 2016

Trabajo Dirigido: Control 5

1. Sea $(G, \cdot)$ un grupo y $f : G \to G$ la función definida por $f(g) = g^{-1}$, probar que si G es grupo abeliano, entonces es f isomorfismo.

2. Sean $G = \{(n, m) \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ y $G' = \{2^a 3^b \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, y se define la suma de pares en G como
$$(n, m) + (p, q) = (n + p, m + q)$$
   (I) Demuestre que $(G', \cdot)$ es subgrupo de $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ donde $\cdot$ es el producto en $\mathbb{R}$.
   (II) Observe que (G,+) es grupo. Demuestre que $(G, +)$ es isomorfo a $(G', \cdot)$.

3. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo, con unidad y sin divisores de 0, sobre $A \times A \setminus \{0\}$ se define la siguiente relación de equivalencia (demuéstrelo):
$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$$
   Adicionalmente sobre $A \times A \setminus \{0\}/\sim$ (el conjunto cuociente) denotamos la clase $[(a, b)]$ por $\frac{a}{b}$, y definimos las operaciones
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \qquad\qquad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$
   Pruebe que estas operaciones **están bien definidas** y que $(A \times A \setminus \{0\}/\sim, +, \cdot)$ es un cuerpo, con $\frac{0}{1} = 0$ y $\frac{1}{1} = 1$.
   Con esto puede notar que $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}/\sim, +, \cdot) \cong (\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

4. Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo con unidad. Se define $G \subseteq A$ por
$$G = \{a \in A \mid a \text{ tiene inverso para } \cdot\}$$
   (I) Mostrar que $(G, \cdot)$ es un grupo abeliano.
   (II) Sea $H = \{a^2 \mid a \in G\}$. Pruebe que H es subgrupo de G.
   (III) Si $A = \mathbb{Z}_8$, encuentre G y H.

5. Demuestre que $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ es isomorfo a $(\{1, -1, i, -i\}, \cdot)$.

6. Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| \neq 1$ y considere $n \geq 1$. Prueba que $\frac{1}{1+z^n} + \frac{1}{1+\bar{z}^n}$ es un número real.