

P. 4 R en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\}$ se define por $(x, y) R (z, t) \Leftrightarrow xt = zy$

i) Dem. que R es relación de equivalencia y describir clases $[0, 1]$ y $[3, 3]$

0.2) 1) R es reflexiva mi $\forall (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\}, (x, y) R (x, y)$

En efecto $(x, y) R (x, y) \Leftrightarrow xy = xy \Leftrightarrow \checkmark$

0.3) 2) Simetría $(x, y) R (z, t) \Leftrightarrow xt = zy \Leftrightarrow zy = xt \Leftrightarrow (z, t) R (x, y)$

3) Transitividad: Sean $(x, y) R (z, t) \wedge (z, t) R (u, v)$

$$\Leftrightarrow xt = zy \wedge zv = ut \Rightarrow \cancel{x}t \cancel{z}v = \cancel{z}y \cancel{u}t$$

1.0) $\Rightarrow xv = uy \Rightarrow (x, y) R (u, v)$

$$[0, 1] = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\} / (x, y) R (0, 1)\} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\} / x \cdot 1 = 0 \cdot y = 0\}$$

0.5) $= \{(0, y) / y \in \mathbb{Z} - \{0\}\}$

$$[3, 3] = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\} / (x, y) R (3, 3)\} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\} / 3x = 3y\}$$

0.5) $= \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\} / x = y\}$

ii) Sea $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\} \rightarrow \mathbb{Q}; f(x, y) = \frac{x}{y}$

Demostar que $(x, y) R (z, t) \Leftrightarrow f(x, y) = f(z, t)$

1.5) En efecto, $(x, y) R (z, t) \Leftrightarrow xt = zy \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{z}{t} (y, t \neq 0) \Leftrightarrow f(x, y) = f(z, t)$

iii) Demuestre que la función $F: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\} / R \rightarrow \mathbb{Q}$ tal $F([x, y]) = f(x, y)$ es biyectiva.

En efecto: F es inyectiva pues: $F([x, y]) = F([z, t]) \Rightarrow f(x, y) = f(z, t)$ (por ii)

1.0) $\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{z}{t} \Rightarrow xt = zy \xRightarrow{\text{Def } R} (x, y) R (z, t) \xRightarrow{\text{Propiedad}} [x, y] = [z, t]$

0.5) F es sobreyectiva pues $\forall q \in \mathbb{Q}, q = \frac{x}{y}$ con $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\}$, existe $[(x, y)] \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\} / R$ tal que $F([(x, y)]) = f(x, y) = \frac{x}{y} = q$.

0.5) iv) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\} / R$ es numerable pues F es biyectiva y $\mathbb{Q}$ es numerable

Punto Problema 2

a) Los m naturales consecutivos (m impar) a partir de k_0 están entre k_0 y $k_0 + m - 1$. Si su suma sería:

$$\sum_{i=k_0}^{k_0+m-1} i = \sum_{i=1}^{k_0+m-1} i - \sum_{i=1}^{k_0-1} i = \frac{(k_0+m-1)(k_0+m)}{2} - \frac{(k_0-1)k_0}{2} \quad \left(\begin{array}{l} \text{Sumas} \\ \text{Emparejadas} \end{array} \right)$$

(10)
$$= \frac{k_0^2 + k_0 m - k_0 + k_0 m + m^2 - m - k_0^2 + k_0}{2} = \frac{2k_0 m + m^2 - m}{2} = m \frac{2k_0 + m - 1}{2}$$

Como m es impar, $m-1$ es par $\Rightarrow 2k_0 + m - 1$ es par $\Rightarrow \frac{2k_0 + m - 1}{2} \in \mathbb{N}$

(20) Sigue que la suma es divisible por $m (= m \cdot p, p \in \mathbb{N})$

b) Demostrar por inducción que $\sum_{i=1}^n (1+i)2^i = n 2^{n+1} \quad \forall n \geq 1$

(05) 1) Paso base $n=1$ $\sum_{i=1}^1 (1+i)2^i = 1 \cdot 2^2 \Leftrightarrow (1+1)2^1 = 4 \Leftrightarrow \forall$

2) H.I. Sea $\sum_{i=1}^n (1+i)2^i = n 2^{n+1}$, algún $n \in \mathbb{N}$

(0.5) 3) P.d.y': $\sum_{i=1}^{n+1} (1+i)2^i = (n+1)2^{n+2}$

En efecto $\sum_{i=1}^{n+1} (1+i)2^i = \sum_{i=1}^n (1+i)2^i + (n+2)2^{n+1}$

(10)
$$= \underbrace{n 2^{n+1}}_{\text{H.I.}} + (n+2)2^{n+1}$$

$$= 2^{n+1} \left(\underbrace{n + n+2}_{2n+2} \right) = 2^{n+1} 2(n+1)$$

(10)
$$= 2^{n+2} (n+1) //$$