

MA1101-5 Introducción al Álgebra

Profesor: Maya Stein

Auxiliar: Juan Pedro Ross

Fecha: Jueves 26 de Mayo del 2016



Auxiliar 10: Grupos y Subgrupos

Resumen:
 Sea $(A, *)$ una estructura algebraica.

- $(A, *)$ es un **grupo** si $*$ es asociativa, tiene neutro $e \in A$ y todo elemento $x \in A$ tiene inverso $x^{-1} \in A$.
- Si $(A, *)$ es grupo, y $\phi \neq H \subseteq A$. Diremos que $(H, *)$ es **subgrupo**, si $(H, *)$ es un grupo, o equivalentemente $(\forall x, y \in H) x * y^{-1} \in H$.
- **Teorema de Lagrange.** Sea $(G, *)$ un grupo finito y $(H, *)$ un subgrupo cualquiera de él. Entonces $|H|$ divide a $|G|$.
- Sean $(A, *)$ y (B, Δ) estructuras algebraicas, diremos que **f es morfismo** si es una función que cumple:

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ x * y &\longmapsto f(x * y) = f(x)\Delta f(y) \quad (\forall x, y \in A) \end{aligned}$$

Si además f es biyectivo se denomina **isomorfismo** y se habla de que $(A, *)$ es **isomorfo** (B, Δ)
 Notación: $(A, *) \cong (B, \Delta)$.

P1. Sea (G, \cdot) grupo y H, K subgrupos de G , demuestre que

- (a) $H \cap K$ es subgrupo de G .
- (b) Sean H y G tales que $|H| = 38$ y $|K| = 55$. Demostrar que $H \cap K = \{e\}$. Con e el neutro.
- (c) $H \cup K$ es subgrupo de $G \Leftrightarrow H \subseteq K \vee K \subseteq H$.

P2. Considere (\mathbb{Z}_5, \cdot_5) .

- (i) Construya la tabla para la operación \cdot_5 en \mathbb{Z}_5 .
- (ii) Explique por qué (\mathbb{Z}_5, \cdot_5) no es un grupo.
- (iii) Muestre que $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{[0]\}, \cdot_5)$ es un grupo abeliano.
- (iv) Encuentre los subgrupos de $(\mathbb{Z}_5 \setminus \{[0]\}, \cdot_5)$. Explique.
Indicación: considere el teorema de Lagrange.

P3. Sea $(G, *)$ un grupo no necesariamente abeliano, con neutro e.

Para $a \in G$ se defina la función $f_a : G \rightarrow G, f_a(x) = a * x * a^{-1}$.

- (i) Pruebe que $f_e = id_G$ y que para todo $a, b \in G, f_{a*b} = f_a \circ f_b$. Donde \circ es la composición de funciones.
- (ii) Pruebe que $\forall a \in G, f_a$ es un isomorfismo de $(G, *)$ en $(G, *)$.
 Concluya que f_a es invertible con $f_a^{-1} = f_{a^{-1}}$ y que la estructura $(\{f_a | a \in G\}, \circ)$ es un grupo.
- (iii) Pruebe que si $H(G) = \{a \in G | f_a = id_G\}$, entonces $(H(G), *) \leq (G, *)$, es decir $(H(G), *)$ es subgrupo de $(G, *)$. Y que $a \in H(G) \Leftrightarrow \forall x \in G, a * x = x * a$.

P4. (a) (G, \cdot) un grupo abeliano y $H, K \subseteq G$ dos subgrupos de G . Probar que el conjunto

$$H \cdot K = \{h \cdot k \mid h \in H, k \in K\}$$

es subgrupo de (G, \cdot) .

- (b) Sea (G, \cdot) un grupo finito de orden 4, es decir $|G| = 4$, con neutro $e \in G$. Pruebe que $\forall a \in G \setminus \{e\}$ se tiene que $a^3 \neq e$ ($a^3 = a \cdot a \cdot a$).

Indicación: Use el teorema de Lagrange.