P1] $(x,y)R(z,t) \iff xt = zy$

definida en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

Refleja: $(x,y)\mathbb{R}(x,y) \iff xy = yx \iff V$

$\therefore$ es Refleja

Simétrica: $(x,y)\mathbb{R}(z,t) \iff xt = yz$

$\iff yz = xt$

$\iff zy = xt$

$\iff (z,t)R(x,y)$

$\therefore$ simétrica

Transitiva: $(x,y)R(z,t) \wedge (z,t)R(a,b)$

$xt = yz \wedge zb = ta \quad (\star)$

Queremos llegar a $(x,y)R(a,b)$

$\iff xb = ay$

Es claro que para eso vamos a hacer divisiones en $\star$ pero deben tener cuidado con NO DIVIDIR POR CERO, la relación está definida en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / \{0\}$ así que SOLO LA SEGUNDA COORDENADA ES SIEMPRE $\neq$ de 0. así que podemos dividir por y, t, b sin preocupación

$$xt = yz \Rightarrow x = \frac{yz}{t} \Rightarrow xb = y\frac{zb}{t} \quad (\star\star)$$

$$zb = ta \Rightarrow a = \frac{zb}{t} \Rightarrow xb = ya = ay$$

$\therefore$ Transitiva

R+S+T $\iff$ EQUIVALENCIA.

$[(0,1)]_R = \{(x,y) \text{ tq } (0,1)\, R\, (x,y)\}$

$(0,1)\, R\, (x,y) \iff 0y = 1\cdot x$

$\iff 0 = x$

¿y el "y"?

Piensalo tuvo que amplirse alguna condición para el y no! asíque puede ser cualquiera! :)

$\Rightarrow [(0,1)]_R = \{(0,y) \text{ con } y \in \mathbb{Z}/\{0\}\}$

esto pues la relación se define en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\{0\}$

$[(3,3)]_R = \{(x,y) \text{ tq } (3,3)\, R\, (x,y)\}$

$(3,3)\, R\, (x,y) \iff 3x = 3y$

$\iff x = y$

$\Rightarrow [(3,3)]_R = \{(x,x) \text{ con } x \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\}$

OJO SI BIEN LA PRIMERA COORDENADA PUEDE SER 0, LA SEGUNDA NO PERO COMO SON IGUALES NINGUNA SERÁ 0 //

b) $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}$

$$f(x,y) = \frac{x}{y}$$

PDQ $(x,y) \, R \, (z,t) \iff f(x,y) = f(z,t)$

$$\iff xt = yz \iff \frac{x}{y} = \frac{z}{t} \iff f(x,y) = f(z,t) \; //$$

¡ojo! puedo pasar dividiendo pues sé que la 2^{da} coordenada no es 0.

c) $F: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}/_R \to \mathbb{Q}$

$$F([x,y]) = f(x,y) = \frac{x}{y}$$

¿What? tranquilo esta función toma una CLASE DE EQUIVALENCIA, y de ahí saca un representante y eso lo mete a f

¡ojo! $F([3,3]) = f(3,3) = 1$

$F([4,4]) = f(4,4) = 1$

ah! entonces claramente F NO es inyectiva pues $(3,3) \neq (4,4)$ y TIENEN LA MISMA IMAGEN.

NO!

eso es cierto para f
pero <u>NO</u> para $\mathcal{F}$, pues
a $\mathcal{F}$ le entran <u>clases de equivalencia</u>, y siempre recuerden
que si $y \in [x] \iff [y] = [x]$
en este caso $(4,4) \in [(3,3)]$
$$\Rightarrow [(4,4)]_R = [(3,3)]_R$$

<u>AH!</u> teniendo esto en cuenta veamos que $\mathcal{F}$ biyectiva.

<u>INYECTIVIDAD:</u>

$\mathcal{F}([(x,y)]) = \mathcal{F}([(z,t)])$

PDQ: $[(x,y)] = [(z,t)]$

o bien que $(z,t) \in [(x,y)]$

es decir $(z,t) \, R \, (x,y)$

si demuestro cualquiera de esas gané.

$\mathcal{F}([(x,y)]) = \mathcal{F}([z,t])$

$\Rightarrow f(x,y) = f(z,t)$

$\iff (x,y) \, R \, (z,t)$ por b)

$\therefore$ inyectiva.

sobreyectividad:

Sea $z \in \mathbb{Q}$ Pdq $\exists [(x,y)]$ tq $F([(x,y)]) = z$

NOTEMOS QUE $\mathbb{Q}$ SON LOS RACIONALES QUE POR DEFINICIÓN SE PUEDEN ESCRIBIR COMO FRACCIÓN

$z = \dfrac{p}{q}$ $\leftarrow$ entero; $\leftarrow$ entero $\neq$ de 0 $\Big\}$ (p,q) puede usarse en la Relación.

tomando $(x,y) = (p,q)$

$$F([(p,q)]) = f(p,q) = \frac{p}{q} = z$$

$\therefore$ sobreyectividad

$\therefore$ biyectiva

d) claramente $F: \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/\{0\}/R$ es numerable pues existe una biyección entre él y $\mathbb{Q}$ el cual es numerable.

P2] pdq: $\underbrace{K_0 + (K_0+1) + \cdots}_{n \text{ términos}}$

es divisible por n

es decir $K_0 + (K_0+1) + \cdots = n K$
$\uparrow$ ENTERO!

NOTEMOS QUE los n términos terminan en $\underline{\underline{K_0 + (n-1)}}$

pues se parte contando desde $K_0 + \underline{\underline{0}}$

$$\Rightarrow K_0 + (K_0+1) + \cdots + K_0 + (n-1)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} K_0 + i = \sum_{i=0}^{n-1} K_0 + \sum_{i=0}^{n-1} i$$

$$= K_0 (n-1+1) + \frac{(n-1)(n-1+1)}{2}$$

$$= K_0 n + \frac{(n-1)n}{2}$$

$$= n \underbrace{\left(2K_0 + \frac{(n-1)}{2}\right)}_{¿K?}$$

¿es eso un entero?

para ello $2K_0 + (n-1)$

debiese ser par

claramente $2K_0$ lo es

¿y $~~n~~-1$? SI pues n es impar!

$\Rightarrow$ suma de pares es par

$\Rightarrow$ $\dfrac{2K_0 + (n-1)}{2}$ ES ENTERO!

$\therefore$ $K_0 + (K_0+1) + \dots + (K_0 + (n-1))$

es divisible por n //

PDQ: $\sum_{i=1}^{n} (1+i) 2^i = n 2^{n+1} \quad \forall n \geq 1$

CB: $n = 1$

$$\sum_{i=1}^{1} (1+i) 2^i = (1+1) 2^1 = 2 \cdot 2 = 4 = 1 \cdot 2^2 \quad //$$

$\therefore$ CB se cumple

HI: asumimos ~~V~~ que para algún n

$$\sum_{i=1}^{n} (1+i) 2^i = (n) 2^{n+1}$$

PDQ: $$\sum_{i=1}^{n+1} (1+i) 2^i = (n+1) 2^{n+2}$$

$$\parallel$$

$$\sum_{i=1}^{n} (1+i) 2^i + (1+n+1) 2^{n+1}$$

$$\overset{HI}{=} n 2^{n+1} + 2^{n+1} (n+2)$$

$$= 2^{n+1} (2n+2)$$

$$= 2^{n+1} \cdot 2 (n+1)$$

$$= 2^{n+2} (n+1) \quad // \quad \therefore \sum_{i=1}^{n} (1+i) 2^i = n 2^{n+1} \quad \forall n \geq 1 \quad //$$