

$$a) f(n) = 1 - \sum_{k=0}^n \frac{k}{(k+1)!}$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^n \frac{k+1-1}{(k+1)!}$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right) \leftarrow \text{telescópica}$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{(n+1)!} \right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}$$

$$b) g \circ f = \left(\frac{1}{(n+1)!} \right)^{-1} = (n+1)!$$

claramente $\text{Im}(g \circ f) \subseteq \mathbb{N}$ pues $(n+1)! = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{natural}}}{1} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nat.}}}{2} \cdot \dots \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nat.}}}{n} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nat.}}}{n+1}$

multiplicación de natural es natural.

claramente es inyectiva pues sea $x_1 \neq x_2$

digamos $x_1 < x_2$

$$\Rightarrow (g \circ f)(x_1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot x_1$$

$$(g \circ f)(x_2) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot \underbrace{x_1(x_1+1) \cdot \dots \cdot x_2}_{\text{como son enteros } \neq \text{s de } \mathbb{I}}$$

la multiplicación es $\neq$ de $\mathbb{I}$

$$\text{asi } (g \circ f)(x_1) < (g \circ f)(x_2)$$

$$\text{en particular } (g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_2)$$

$\therefore$ inyectiva.

sobreyectividad

No es sobreyectiva por ejemplo
el 3 no tiene pre-imagen.

$1 \cdot 2 = 2$
 $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ ← ¡y los de entremedio no tienen a nadie !!

⇒ NO SOBREYECTIVA.

∴ No biyectiva.

P2) EQUIVALENCIA $\Leftrightarrow$ SIMÉTRICA, REFLEJA, TRANSITIVA.

R) $ARA \Leftrightarrow \exists f: A \rightarrow A$ biyectiva,
basta tomar Id_A
∴ REFLEJA

S) $ARB \Rightarrow \exists BRA$
si pues si $\exists f: A \rightarrow B$ biyectiva
 $\Rightarrow \exists f^{-1}: B \rightarrow A$ biyectiva
∴ SIMÉTRICA.

T) $ARB \wedge BRC \Rightarrow \exists ARC?$
 $\exists f: A \rightarrow B$ $\exists g: B \rightarrow C$

biyectivas
composición de
biyectivas es
biyectiva.

$g \circ f$
 $\Rightarrow g \circ f: A \rightarrow C$ biyectiva
∴ ARC

∴ TRANS.

∴ EQUIVALENCIA

como A es infinito, $\mathbb{N}$ es el
infinito más chico

$$|\mathbb{N}| \leq |A|$$

Pero $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subseteq E \Rightarrow |A| \leq |E| = |\mathbb{N}|$
↑
enunciado

$$\Rightarrow |\mathbb{N}| \leq |A| \wedge |A| \leq |\mathbb{N}|$$

$$\therefore |\mathbb{N}| = |A|$$

$$[A]_R = \{ X \subseteq E \mid \exists f: X \rightarrow A \text{ biyectiva} \}$$

$$= \{ X \subseteq E \mid \exists f: X \rightarrow A \text{ biyectiva} \}$$

$$= \{ X \subseteq E \mid |X| = |A| \}$$

$$= \{ X \subseteq E \mid X \text{ es numerable} \} //$$

finalmente ya vimos que

R es reflexiva $\Rightarrow A \in [A]_R$

Pero además A es infinito

$$\therefore \exists g: A \rightarrow A \setminus \{x_0\} \text{ biyectiva}$$

$$\Rightarrow A \setminus \{x_0\} \in [A]_R$$

y claramente son distintos.

P3 | I) $f \circ f(x) = f(f(x))$

$$= f(A \cap (B \cup x))$$

$$= A \cap (B \cup (A \cap (B \cup x)))$$

$$= A \cap ((B \cup A) \cap (B \cup (B \cup x)))$$

$$= A \cap (B \cup A) \cap (B \cup B \cup x)$$

$$= A \cap (B \cup x) \text{ pues } A \subseteq B \cup A.$$

$$= f(x)$$

II) CB: $n=1$ // demostrado recién

HI: asumimos que para algún n

$$\underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{n \text{ veces}}(x) = f(x)$$

PDQ: $f^{(n+1)}(x) = f(x)$

pero $f^{n+1}(x) = \underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{n \text{ veces}}(x)$
 $\uparrow$
 1 vez

por HI = $(f \circ f)(x)$

por CB = $f(x)$ //

~~N~~
 ~~x_1~~
 ~~x_2~~

III) Si $A \neq U \Rightarrow \exists x_0 \in A^c$

si como $x = \emptyset$

$$\Rightarrow f(x) = A \cap B$$

si como $x = \{x_0\}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) &= A \cap (B \cup \{x_0\}) \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap \{x_0\}) \end{aligned}$$

$$= A \cap B \cup \emptyset$$

$$= A \cap B //$$

$\Rightarrow f$ no inyectiva.

si $B \neq \emptyset \Rightarrow \exists x_0 \in B$

si como $x = \emptyset$

$$\Rightarrow f(x) = A \cap B$$

si como $x = \{x_0\}$

$$\Rightarrow f(x) = A \cap (B \cup \{x_0\})$$

$$= A \cap B$$

Pues $\{x_0\} \subseteq B$

$\Rightarrow f$ no inyectiva //

iv) Si $A \neq U$

$$\Rightarrow \exists x_0 \in A^c$$

Luego es imposible que $A \cap \text{alguien} = \{x_0\}$
pues x_0 tendría que estar
en A y en alguien y como $x_0 \in A^c$
 $x_0 \notin A$ EN A . $\Rightarrow$ NO SOBREYECTIVA

Si $B \neq \emptyset$

$$\Rightarrow \exists x_0 \in B$$

y ya sabemos que si $A \neq U$
 f no es sobreyectiva, luego el único
caso que vale la pena analizar es $A = U$

$$\Rightarrow A \cap (B \cup X) = U \cap (B \cup X) = B \cup X$$

como B contiene a alguien es
imposible que esa unión de $\emptyset$
 $\Rightarrow$ NO SOBREYECTIVA

v) Sabemos que

$A \neq U$ o $B \neq \emptyset \Rightarrow f$ no inyectiva

$A \neq U$ o $B \neq \emptyset \Rightarrow f$ no sobreyectiva.

por contrarrecíproca

f inyectiva $\Rightarrow \overline{A \neq U \text{ o } B \neq \emptyset}$

f sobreyectiva $\Rightarrow \overline{A \neq U \text{ o } B \neq \emptyset}$

por De Morgan f inyectiva $\Rightarrow A = U \wedge B = \emptyset$
 f sob $\Rightarrow A = U \wedge B = \emptyset$

Luego f biyectiva $\Rightarrow A = U \wedge B = \emptyset$

$$\Rightarrow f(x) = U \cap (\emptyset \cup X) = X$$

ES LA IDENTIDAD! $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

P4

$$n=0 \quad 3 \cdot 0 + 2 = 2 < 1 \quad \times$$

$$n=1 \quad 3 \cdot 1 + 2 = 5 < 2 \quad \times$$

$$n=2 \quad 3 \cdot 2 + 2 = 8 < 4 \quad \times$$

$$n=3 \quad 3 \cdot 3 + 2 = 11 < 8 \quad \times$$

$$n=4 \quad 3 \cdot 4 + 2 = 14 < 16 \quad \checkmark$$

PDQ:

$$\forall n \geq 4 \quad 3n+2 < 2^n$$

CB $n=4 \quad \checkmark$

HI asumimos

para algún $n+1$

$$n \quad 3n+2 < 2^n$$

PDQ:

$$3(n+1) + 2 < 2^{n+1} \quad \text{HI} \cdot$$
$$= 3n + 2 + 3 < 2^n + 3 < 2^{n+1} ?$$

Veamos que $2^n + 3 < 2^{n+1} \quad \forall n \geq 4$

CB $n=4$: $2^4+3=19 < 32=2^5$ ✓

HI para algún n $2^n+3 < 2^{n+1}$

POQ $2^{n+1}+3 < 2^{n+2}$

pero $2^{n+2} = 2^{n+1} \cdot 2$ usando HI

$$> (2^n+3) \cdot 2$$

$$= 2^{n+1} + 6$$

$$> 2^{n+1} + 3$$

o. $2^n+3 < 2^{n+1}$
 $\forall n \geq 4$

$$\Rightarrow 3n+2 < 2^n \quad \forall n \geq 4 //$$