11. Semana 10

P1 $\Rightarrow$ Tomemos $h^{-1}, g^{-1} \in G$, se tiene que como f es isomorfismo $f(h^{-1} * g^{-1}) = f(h^{-1}) * f(g^{-1}) = (h^{-1})^{-1} * (g^{-1})^{-1} = h*g$, por otro lado, por definición de la función y propiedad de inversos, $f(h^{-1} * g^{-1}) = (h^{-1} * g^{-1})^{-1} = (g^{-1})^{-1} * (h^{-1})^{-1} = g * h$, juntando ambas expresiones se tiene que $h * g = g * h$.

$\Leftarrow$ Tomemos $h, g \in G$, luego $g*h = (g^{-1})^{-1}*(h^{-1})^{-1} = (h^{-1}*g^{-1})^{-1} = f(h^{-1}*g^{-1})$, por otro lado, $h * g = (h^{-1})^{-1} * (g^{-1})^{-1} = f(h^{-1}) * f(g^{-1})$, pero como es grupo abeliano se tiene que $h*g = g*h$, juntando ambas expresiones se tiene que $f(h^{-1})*f(g^{-1}) = f(h^{-1}*g^{-1})$, es decir, es morfismo, falta ver que sea biyectivo.

- Inyectivo: $(\forall g_1.g_2 \in G)(f(g_1) = f(g_2) \Rightarrow g_1 = g_2)$, en efecto, sean $g_1, g_2 \in G$, se tiene que

$$\begin{aligned} f(g_1) &= f(g_2) \\ g_1^{-1} &= g_2^{-1} && \backslash \text{tomando inverso (existe porque } g_1 \text{ y } g_2 \text{ son biyectivas) } ()^{-1} \\ g_1 &= g_2 \end{aligned}$$

- Epiyectivo: $(\forall h \in G)(\exists g \in G)(f(g) = h)$, en efecto, sea $h \in G$, basta tomar $g = h^{-1}$ que sabemos que existe porque h es función biyectiva, con esto se tiene que $f(g) = f(h^{-1}) = (h^{-1})^{-1} = h$.

Con lo que se concluye que f es isomorfismo.

P2 **(a)** Si $(A, \circ)$ es grupo debemos demostrar asociatividad, existencia de neutro e inverso.

- Asociatividad: Esto ya se tiene porque la composición de funciones es asociativa.
- Neutro: Es claro que el neutro es la identidad, fijarse que $F \circ id_G = id_g \circ F = F$, falta ver que $id_G \in A$, es decir que sea isomorfismo, en efecto $id_G(x * y) = x * y = id_G(x) * id_G(y)$.
- Inverso: Dado un $F \in A$ es claro que el inverso es F^{-1} sabemos que existe porque es una función biyectiva, falta ver que sea morfismo. En efecto, sea $z = F(x)$ y $w = F(y)$, se tiene que $F^{-1}(z) = x$ y $F^{-1}(w) = y$, luego

$$\begin{aligned} F^{-1}(z * w) &= F^{-1}(F(x) * F(y)) \\ &= F^{-1}(F(x * y)) && \backslash \text{ya que } F \text{ es isomorfismo} \\ &= x * y \\ &= F^{-1}(z) * F^{-1}(w) \end{aligned}$$

Se concluye que, dado un F, el inverso es F^{-1} (la inversa de la función).

Con esto se tiene que $(A, \circ)$ es grupo.

(b) b.1 Demostraremos que F_g es homomorfismo de $(G,*)$ en $(G,*)$, en efecto, sean $x,y,g \in G$

$$\begin{aligned} F_g(x*y) &= g*(x*y)*g^{-1} \\ &= g*(x*e*y)*g^{-1} \quad \backslash\text{operar con el neutro que no altera la ecuación} \\ &= g*(x*(g^{-1}*g)*y)*g^{-1} \\ &= (g*x*g^{-1})*(g*y*g^{-1}) \quad \backslash\text{por asociatividad} \\ &= F_g(x)*F_g(y) \end{aligned}$$

Se concluye que F_g es homomorfismo de $(G,*)$ en $(G,*)$.

b.2 Sean $x,g,h \in G$

$$\begin{aligned} F_{g*h}(x) &= (g*h)*x*(g*h)^{-1} \\ &= (g*h)*x*(h^{-1}*g^{-1}) \quad \backslash\text{propiedad de los inversos} \\ &= g*(h*x*h^{-1})*g^{-1} \quad \backslash\text{por asociatividad} \\ &= g*F_h(x)*g^{-1} \\ &= F_g(F_h(x)) \\ &= F_g \circ F_h(x) \end{aligned}$$

Se concluye que $F_{g*h} = F_g \circ F_h$.

b.3 Recordemos que el inverso de e es él mismo, luego se tiene que $F_e(x) = e*x*e^{-1} = x*e^{-1} = x*e = x$.

Para concluir que F_g es isomorfismo, falta ver que sea biyectiva.

- Inyectiva: $(\forall x_1,x_2 \in G)(F_g(x_1) = F_g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$, en efecto

$$\begin{aligned} F_g(x_1) &= F_g(x_2) \\ g*x_1*g^{-1} &= g*x_2*g^{-1} \backslash\text{operando con inversa de } g \text{ por la izquierda } g^{-1}* \\ (g^{-1}*g)*x_1*g^{-1} &= (g^{-1}*g)*x_2*g^{-1} \quad \backslash\text{por asociatividad} \\ id_G*x_1*g^{-1} &= id_G*x_2*g^{-1} \\ x_1*g^{-1} &= x_2*g^{-1} \quad \backslash\text{operando con } g \text{ por la derecha } g* \\ x_1*(g^{-1}*g) &= x_2*(g^{-1}*g) \quad \backslash\text{por asociatividad} \\ x_1*id_G &= x_2*id_G \\ x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

- Epiyectiva: $(\forall y \in G)(\exists x \in G)(F_g(x) = y)$, en efecto, basta tomar $x = g^{-1}*y*g$, con esto se tiene que

$$\begin{aligned} F_g(x) &= g*x*g^{-1} \\ &= g*(g^{-1}*y*g)*g^{-1} \\ &= (g*g^{-1})*y*(g*g^{-1}) \quad \backslash\text{por asociatividad} \\ &= id_G*y*id_G \\ &= y \end{aligned}$$

Se concluye que F_g es un isomorfismo, además usando las propiedad (b.2) y (b.3) se tiene que $F_g \circ F_{g^{-1}} = F_{g^{-1}} \circ F_g = F_{g*g^{-1}} = F_{g^{-1}*g} = F_e = id_G$, con esto se concluye que el inverso de F_g llamado $(F_g)^{-1}$ es $F_{g^{-1}}$.

(c) Basta ocupar la propiedad compacta, es decir demostrar que $(\forall F_g, F_h \in B)\ F_g \circ (F_h)^{-1} \in B$, en efecto, sean $F_g, F_h \in B$, utilizando la parte (b) se tiene que $F_g \circ (F_h)^{-1} = F_g \circ F_{h^{-1}} = F_{g*h^{-1}}$, claramente $g*h^{-1} \in G$ por ser grupo y obedecer la ley de composición interna, luego $F_{g*h^{-1}} \in B$, se concluye que $(B, \circ)$ es subgrupo de $(A, \circ)$.

P3 Solamente basta demostrar que es conmutativo, utilizando la indicación tenemos que

$$\begin{aligned}(a*b)*(b*a) &= a*(b*b)*a && \backslash\text{por asociatividad}\\ &= a*e*a\\ &= a*a\\ &= e\end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}(b*a)*(a*b) &= b*(a*a)*b && \backslash\text{por asociatividad}\\ &= b*e*b\\ &= b*b\\ &= e\end{aligned}$$

Se puede concluir entonces que $(a*b)^{-1} = b*a$, sin embargo, por la propiedad del enunciado, el inverso de cada elemento del grupo es el mismo elemento, es decir $(a*b)^{-1} = a*b$, juntando ambas igualdades se tiene que $a*b = b*a$, se concluye que $(G, *)$ es grupo abeliano.

P4 Como es grupo todo elemento posee inverso, supongamos que el inverso de a no es b, esto quiere decir que $a*b \neq e$, lo que significa que $a*b = a$ o $a*b = b$, pero

$$\begin{aligned}a*b &= a && \backslash\text{operando con el inverso de } a \text{ por la izquierda } a^{-1}*\\ (a^{-1}*a)*b &= a^{-1}*a && \backslash\text{por asociatividad}\\ e*b &= e\\ b &= e\end{aligned}$$

De manera análoga

$$\begin{aligned}a*b &= b && \backslash\text{operando con el inverso de } b \text{ por la derecha } b^{-1}*\\ a*(b*b^{-1}) &= a*(b*b^{-1}) && \backslash\text{por asociatividad}\\ a*e &= e\\ a &= e\end{aligned}$$

En ambos casos nos lleva a una contradicción, se concluye que $a^{-1} = b$.

P5 **(a)** Si $(G\times H,\triangle)$ es grupo debemos demostrar asociatividad, existencia de neutro e inverso.

- Asociatividad: Sean $(a,b),(c,d),(e,f)\in G\times H$

$$\begin{aligned}(a,b)\triangle[(c,d)\triangle(e,f)] &= (a,b)\triangle(c*e,d\circ f)\\ &= (a*(c*e),b\circ(d\circ f))\\ &= ((a*c)*e,(b\circ d)\circ f) && \text{\por asociatividad de } G \text{ y } H\\ &= (a*c,b\circ d)\triangle(e,f)\\ &= [(a,b)\triangle(c,d)]\triangle(e,f)\end{aligned}$$

- Neutro: El neutro es el par ordenado que contiene los neutros respectivos de cada grupo, en efecto, sean $(a,b),(e_G,e_H)\in G\times H$, se tiene que

$$\begin{aligned}(a,b)\triangle(e_G,e_H) &= (a*e_G,b\circ e_H)\\ &= (a,b)\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}(e_G,e_H)\triangle(a,b) &= (e_G*a,e_H\circ b)\\ &= (a,b)\end{aligned}$$

Se concluye que el neutro es (e_G,e_H).

- Inverso: Sea $(a,b)\in G\times H$ y sean a^{-1} y b^{-1} los inversos de a y b en G y H respectivamente (existen porque G y H son grupos), tomando el par ordenado $(a^{-1},b^{-1})\in G\times H$ se tiene que

$$\begin{aligned}(a,b)\triangle(a^{-1},b^{-1}) &= (a*a^{-1},b\circ b^{-1})\\ &= (e_G,e_H)\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}(a^{-1},b^{-1})\triangle(a,b) &= (a^{-1}*a,b^{-1}\circ b)\\ &= (e_G,e_H)\end{aligned}$$

Se concluye que el inverso es (a^{-1},b^{-1}).

Con esto se tiene que $(G\times H,\triangle)$ es grupo.

(b) Para φ

- Morfismo: Sean $(a,b),(c,d)\in G\times H$ se tiene que

$$\begin{aligned}\varphi((a,b)\triangle(c,d)) &= \varphi(a*c,b\circ d)\\ &= a*c\\ &= \varphi(a,b)*\varphi(c,d)\end{aligned}$$

- Sobreyectivo: $(\forall y \in G)(\exists x \in G \times H)(\varphi(x) = y)$ En efecto, basta tomar $x = (y, h)$, con esto se tiene que $\varphi(x) = \varphi(y, h) = y$.

Para ψ

- Morfismo: Sean $(a, b), (c, d) \in G \times H$ se tiene que

$$\begin{aligned}\psi((a, b) \bigtriangleup (c, d)) &= \psi(a * c, b \circ d)\\ &= b \circ d\\ &= \psi(a, b) \circ \psi(c, d)\end{aligned}$$

- Sobreyectivo: $(\forall y \in H)(\exists x \in G \times H)(\psi(x) = y)$ En efecto, basta tomar $x = (g, y)$, con esto se tiene que $\psi(x) = \psi(g, y) = y$.

(c) $\Rightarrow$ Sean $(a^{-1}, e), (b^{-1}, e) \in G \times G$ con e el neutro en G, se tiene que como es morfismo $f((a^{-1}, e) \bigtriangleup (b^{-1}, e)) = f(a^{-1}, e) * f(b^{-1}, e)$, pero $f((a^{-1}, e) \bigtriangleup (b^{-1}, e)) = f(a^{-1} * b^{-1}, e * e) = (a^{-1} * b^{-1} * e * e)^{-1} = (a^{-1} * b^{-1})^{-1} = (b^{-1})^{-1} * (a^{-1})^{-1} = b * a$, por otro lado, $f(a^{-1}, e) * f(b^{-1}, e) = (a^{-1} * e)^{-1} * (b^{-1} * e)^{-1} = (a^{-1})^{-1} * (b^{-1})^{-1} = a * b$, juntando ambas igualdades se tiene que $a * b = b * a$.

$\Leftarrow$ Sean $(a, b), (c, d) \in G \times G$, se tiene que

$$\begin{aligned}f((a, b) \bigtriangleup (c, d)) &= f(a * c, b * d)\\ &= (a * c * b * d)^{-1}\\ &= (a * b * c * d)^{-1} && \text{\por ser grupo abeliano}\\ &= (c * d)^{-1} * (a * b)^{-1}\\ &= (a * b)^{-1} * (c * d)^{-1} && \text{\por ser grupo abeliano}\\ &= f(a, b) * f(c, d)\end{aligned}$$