

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^n \underbrace{\binom{n-1}{i} \binom{n}{j}}_{\substack{\text{NO} \\ \text{DEPENDE} \\ \text{DE } j}}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \underbrace{\sum_{j=1}^n \binom{n}{j}}$$

PARTE BINOMIO
PERO PARTE DE 1!
Y NO PODAMOS HACER
CAMBIO DE INDICE PORQUE
SI LO HACEMOS

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j+1}$$

← CAMBIA A $j+1$ y
NO HAY FORMA DE
VOLVERLO A j
ASI QUE SOLO QUEDA
AGREGAR EL TÉRMINO 0.

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \left(\underbrace{\sum_{\substack{j=0 \\ \checkmark}}^n \binom{n}{j}}_{\checkmark} - \binom{n}{0} \right)$$

¿Y el $x^{n-k} y^k$? Rellemamos con $1^{\underline{s}}$!

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \left((1+1)^n - \frac{n!}{(n-0)!0!} \right)$$

$\downarrow$ 1 $\downarrow$ 1

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \underbrace{(2^n - 1)}$$

NO DEPENDE
DE i , ASI QUE
SALTE Y QUEDA
MULTIPLICANDO

$$= (2^n - 1) \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} 1^{n-1-i} \cdot 1^i$$

$$= (2^n - 1) 2^{n-1}$$

$$= 2^{n-1} (2^n - 1) //$$

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{k-1} 3^i \binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^n \binom{n-1}{i} \binom{n}{j}$$

YA LA CALCULAMOS
SOLO TRABAJEMOS LA OTRA

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{k-1} 3^i \binom{n}{k}$$

NO DEPENDE
DE i

$$= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{k-1} 3^i$$

GEOMÉTRICA

$$= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{1 - 3^{k-1+1}}{1-3}$$

$$= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{1 - 3^k}{-2} = \frac{1}{-2} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} - \binom{n}{k} 3$$

$$= \frac{1}{-2} \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} - \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3 \right)$$

NUEVAMENTE TENEMOS PROBLEMAS
 CON EL INICIO DE LOS INDICES
 PERO NO PODEMOS HACER UN
 CAMBIO DE INDICES PUES
 PERDERÍAMOS EL $\binom{n}{k}$ ASÍ QUE
 AGREGAMOS EL TÉRMINO 0. YA VIMOS ES $\frac{1}{1}$.

$$= \frac{1}{-2} \left(\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \right) - \binom{n}{0} \right) - \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k - \binom{n}{0} 3^0 \right)$$

$\uparrow$ COMPLETAMOS CON $1^k \cdot 1^{n-k}$

$\uparrow$ COMPLETAMOS CON 1^{n-k}

$$= \frac{1}{-2} \left((1+1)^n - 1 \right) - \left((1+3)^n - 1 \cdot 1 \right)$$

$$= \frac{1}{-2} \left(2^n - 1 - 4^n + 1 \right)$$

$$= \frac{1}{-2} \left(2^n - 4^n \right) = \frac{1}{-2} \left(2^n - 2^{2n} \right)$$

$$= 2^{2n-1} - 2^{n-1}$$

$$= 2^{n-1} (2^n - 1) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^n \binom{n-1}{i} \binom{n}{j}$$

//

P2]

$$A = \{ (m^4 + 5)^n \mid \text{con } m, n \in \mathbb{N} \}$$

HAY MUCHAS FORMAS DE HACER ESTA PREGUNTA
ESTA ES UNA.

NOTAMOS QUE A ES infinito pues

si "fijo" m en $\overline{m}$ puedo mover

n en todos los naturales y sigo

estando dentro A, luego A es infinito

$\Rightarrow |A| \geq |\mathbb{N}|$ pues $\mathbb{N}$ es el infinito
más chico

A $\subset \mathbb{N}$ $\Rightarrow |A| \leq |\mathbb{N}|$

Notemos que si m y n
son naturales

$$m^4 \in \mathbb{N}$$

$$m^4 + 5 \in \mathbb{N}$$

$$(m^4 + 5)^n \in \mathbb{N} \Rightarrow A \subseteq \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow |A| \leq |\mathbb{N}|$$

$$\text{Así } |A| = |\mathbb{N}|$$

b) forma 1:

Sea $y \in g(E)$

como $g(E)$ es el conjunto
imagen existe AL MENOS UN
 x t.s. $g(x) = y$

OJO PERFECTAMENTE PODRÍA HABER
MÁS DE UNO, ~~PERO~~ SI g NO FUESE
INYECTIVA, PERO EXISTE AL MENOS UNO

Sea $\star h: g(E) \rightarrow E$

$$y \rightarrow h(y) = \bar{x}$$

con $\bar{x}$ UNO DE LOS x t.s. $g(x) = y$
POR EJEMPLO si g fuese x^2

$$h(4) = 2$$

$$h(4) = -2$$

CUALQUIERA O BIEN PERO SOLO TOMAMOS 1

(sino h no sería función)
claramente esta función es
inyectiva sino g no sería función
pues g mandaría a un x
a dos imágenes distintas.

$$\Rightarrow |g(E)| \leq |E| = |N| \text{ por hip.}$$

$\star$ LA SIGUIENTE PÁGINA EXPLICA MEJOR ESTO $\downarrow$

ENTIENDO QUE ESO DE
"TOMAR UN x " puede sonar
medio flake o poco intuitivo,
pero es importante que
vayan aprendiendo a usar
"argumentos por construcción"
que es precisamente eso,
YO CONSTRUYO LA FUNCIÓN QUE
QUIERO QUE CUMPLA TAL COSA
¿y cumple eso? sí porque yo
la construí así.

EN ESTE CASO si yo supiese que
 g es inyectiva es simple envío
" y " a su pre-imagen; pero si
no es inyectiva es porque
hay al menos un " x " que tiene
más de una pre-imagen

¿y cuál tomo? cualquiera a tí no te
importa como es esa pre-imagen solo
QUE SEA pre-imagen

¿y cómo se me iba a ocurrir eso?
porque te dan información de E y
te preguntan sobre $g(E)$, hay que usar
LA PRE-IMAGEN.

forma 2:

Recordemos $|A| \leq |B|$

$(\Rightarrow) \exists f: A \rightarrow B$ inyectiva

$(\Rightarrow) \exists g: B \rightarrow A$ sobreyectiva.

~~so~~ entonces si consideramos

$$h: E \rightarrow g(E)$$

$$x \rightarrow h(x) = g(x)$$

claramente esta función es
sobreyectiva.

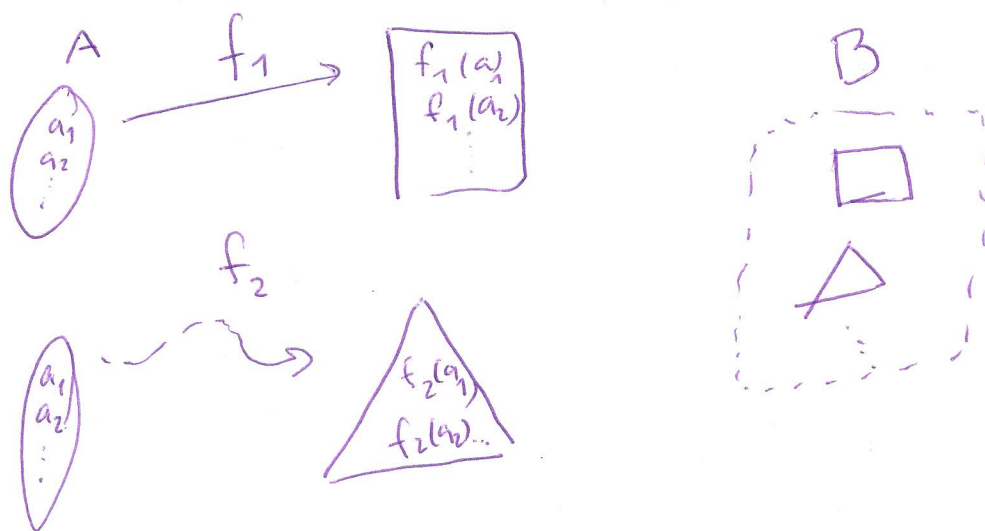
$$\therefore |g(E)| \leq |E| \leq |N|.$$

Insisto ~~o~~ esta son
solo 2 formas hay
muchas más.

P2 b2

Entendamos **B**

tenemos $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ funciones
 TODAS de ~~$\mathbb{R}$~~ $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 y tenemos un conjunto A



En B están las imágenes
 de todas las funciones.

$$B = \{ f_1(a_1), f_1(a_2), \dots, f_2(a_1), f_2(a_2), \dots \}$$

y así con todas las f .

Notemos que f_1 es la identidad

$$\begin{aligned} \Rightarrow f_1(a_1) &= a_1 \\ f_1(a_2) &= a_2 \\ &\vdots \end{aligned} \Rightarrow A \subseteq B$$

$$\Rightarrow |A| \leq |B| \quad \star$$

pero además

$$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(A)$$

y por la parte P2b1 $|f_n(A)| \leq |\mathbb{N}|$

y unión numerable de conjuntos
numerales es numerable

$$\Rightarrow |B| = \left| \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(A) \right| \leq |\mathbb{N}| = |A|$$

$$\Rightarrow |B| \leq |A| + \star$$

$$|B| = |A| \quad //$$