

P1) Veamos que $\exists f: A \cup B \rightarrow A \cup C$
biyectiva.

Como $|B| = |C|$ sabemos que
 $\exists g: B \rightarrow C$
biyectiva.

Tenemos que CONSTRUIR f a
partir de g

$f: A \cup B$ es decir toma elementos
ya sea en A ó en B
y llega a $A \cup C$, es intuitivo
que la función que nos sirve
sea

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in A \\ g(x) & \text{si } x \in B \end{cases}$$

¿Por qué?

la intuición viene de que yo
sé que puedo "cubrir" C con B
y ~~de~~ claramente A "cubre" A

Al final en todos los problemas
de cardinalidad el razonamiento

es parecido a qué función, cubre el espacio de llegada? Bueno analizo como se relaciona el espacio de partida con el del llegada.

Entonces veamos efectivamente f es biyectiva.

Injectividad

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

Bueno 2 casos si $f(x) \in A \cup B$
 $\Rightarrow f(x) \in A \vee f(x) \in B$

¿y porque no puede estar en ambos? En principio obvio que podría PERO $A \cap C = \emptyset$!

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) &\in C \\ \text{como } f(x) &= g(x) \\ f(x) &= f(y) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow g(x) = g(y)$$

$$\Rightarrow \boxed{x = y}$$

pues g
biyectiva
 $\Rightarrow$ inyectiva.

$$\begin{aligned} f(x) &\in A \\ \text{como } f(x) &= x \\ f(y) &= f(x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = x}$$

o sea f inyectiva.

Sobreyectividad.

Sea $y \in A \cup C$

$$\Rightarrow y \in A \vee y \in C$$

bueno si $y \in A$, basta tomar al mismo y

$$\Rightarrow f(y) = y !$$

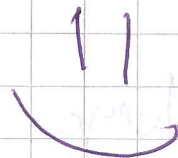
si $y \in B$, queremos alguien de la forma $g(x) = y$
ah! pero g es biyectiva $\Rightarrow$ sobreyectiva

$$\therefore \exists x \in B \text{ t.q. } g(x) = y = f(x)$$

$\Rightarrow f$ sobreyectiva.

$\therefore f$ biyectiva

$$\therefore |A \cup C| = |A \cup B| //$$



PDQ $|A \times B| = |B \times A|$

Queremos $f: A \times B \rightarrow B \times A$

¿Quién "cubre" a quién?

A cubre A n B cubre B

Ah! ya se, consideremos

$$f((x,y)) = (y,x)$$

Iny: $f((x,y)) = f((a,b))$

$$(y,x) = (b,a)$$

$$\Rightarrow y=b ; x=a$$

$$\therefore (x,y) = (a,b)$$

$\therefore$ Inyectiva.

Sobreyectiva sea $(y_1, y_2) \in B \times A$

$$\Rightarrow y_1 \in B \text{ n } y_2 \in A$$

luego si tomamos (y_2, y_1)

$$f((y_2, y_1)) = (y_1, y_2)$$

$\therefore$ Sobreyectiva

$\therefore$ biyectiva $\rightarrow |A \times B| = |B \times A| //$

P3 sabemos que $\mathcal{C} = \{C : C \text{ es una circunferencia de centro } (a,b) \in \mathbb{Q}^2 \text{ y radio } r \in \mathbb{Q}^+\}$

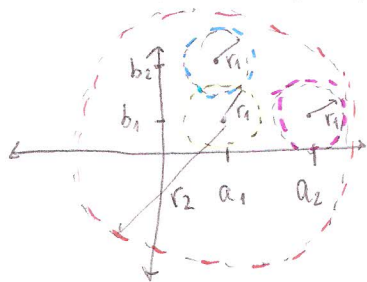
Para cualquier radio $r \in \mathbb{Q}^+$, existen infinitas circunferencias de centro $(a,b) \in \mathbb{Q}^2$, ya que los racionales son infinitos.

Podemos definir $f: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathcal{C}$

$$(a,b,r) \mapsto f(a,b,r) = C$$

donde las primeras dos coordenadas definen el centro de la circunferencia y r el radio.

f es claramente biyectiva ya que para cada (a,b,r) existe una única circunferencia (inyectividad)★ y a la vez, cualquier circunferencia $C \in \mathcal{C}$ se puede definir con esos 3 parámetros (sobreyectividad).



★ si tenemos una circunferencia

C_1 de centro (a_1, b_1) y radio r_1 :

→ si cambiamos el radio a r_2 , nos queda

$$C_2 \neq C_1$$

→ si cambiamos a_1 a a_2 , nos queda $C_3 \neq C_1 \neq C_2$

→ si cambiamos b_1 a b_2 , nos queda $C_4 \neq C_1 \neq C_2 \neq C_3$

ya que $f: \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ es biyectiva

$$|\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+| = |\mathbb{C}|$$

$$\text{Pero } |\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}| \Rightarrow |\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^+| = |\mathbb{N}|$$

$$\Rightarrow |\mathbb{C}| = |\mathbb{N}|$$

Pero nosotros queremos demostrar que si

$$D = \{(P, Q) : P \text{ y } Q \text{ extremos de diámetros horizontales de circunferencias en } \mathbb{C}\}$$

entonces :

$$|D| = |\mathbb{N}|$$

Pero como ya sabemos que $\mathbb{C}$ es numerable, sólo tenemos que demostrar que $|D| = |\mathbb{C}|$

Sea $g: \mathbb{C} \rightarrow D$ que toma una circunferencia en $\mathbb{C}$ y entrega los puntos extremos de su diámetro horizontal.

Esta función también es biyectiva!

inyectividad: cada circunferencia tiene un sólo par de puntos asociados

sobreyectividad: Para cualquier par de puntos $(p_1, p_2), (q_1, q_2)$ en D (dos puntos con coordenadas racionales y $p_2 = q_2$), existe una única circunferencia determinada por esos puntos
(de centro $\left(\frac{p_1+q_1}{2}, p_2\right)$ y radio $\frac{|p_1-q_1|}{2}$)

$$\therefore |C| = |D|$$

$\Rightarrow D$ numerable //

P4 a) Las "Partes de A" (PCA) es el conjunto de todos los subconjuntos de A. Digamos que A tiene n elementos. ~~Entonces~~ ^{entonces} las partes de A incluyen:

→ Los subconjuntos de 0 elementos ($\emptyset$)

→ los subconjuntos de 1 elemento

→ . . .

→ los subconjuntos de n elementos

Pero los subconjuntos de k elementos se pueden escribir como $\binom{n}{k}$ según el enunciado.

Entonces nosotros queremos saber cuántos subconjuntos de A existen en total ($|P(A)|$)

Esto será

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$$

los de 0 elementos los de 1 elemento los de 2 elementos los de n elementos

$$\Rightarrow |P(A)| = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot 1^k \cdot 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

Binomio de Newton.

Pero si A tiene n elementos, $|A|=n$

$$\therefore |P(A)| = 2^{|A|} //$$

b) P.D.Q $\forall n \in \mathbb{N} \quad n < 2^n$

Por (a), esto es lo mismo que decir

P.D.Q $\forall A \text{ finito} \quad |A| < |P(A)|$

Sea A un conjunto finito.

Entonces A se puede escribir como $\{a_1, \dots, a_n\}$

Pero entonces las partes de A incluyen al menos

a $A, \emptyset, \{a_1\}, \{a_2\}, \dots, \{a_n\}$ más todas las combinaciones de elementos. y por lo tanto, $P(A)$ siempre tiene más elementos que A

$$\Rightarrow |A| < |P(A)|$$

$$\Rightarrow n < 2^n //$$

PS) Recordemos que la pre-imagen
 se "porta muy bien" con
 las operaciones ya sea $\cup$, $\cap$, $()^c$
 la que nos va a interesar
 esta vez

$$U f^{-1}(x_i) = f^{-1}(U x_i)$$

¿y porque eso?

ES UTIL RECORDAR QUE TODO
 CONJUNTO SE PUEDE ESCRIBIR
 COMO LA UNIÓN DE SUS SINGLETONS

$$\mathbb{R} = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\} \leftarrow \mathbb{R} \text{ ES NO-NUMERABLE}$$

$\Rightarrow$ ESTA UNIÓN ES
 NO NUMERABLE

$$\emptyset = \bigcup_{x \in \emptyset} \{x\}$$

PERO
 $\mathbb{N}$ y $\emptyset$ son
 numerables,
 por lo que
 esta unión
 es numerable!

$$\mathbb{N} = \bigcup_{x \in \mathbb{N}} \{x\}$$

UNIÓN NUMERABLE DE
 CONJUNTOS NUMERABLES ES NUMERABLE.

Sabiendo eso esta pregunta
se vuelve harto más simple
como

$$f: A \rightarrow \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow A = f^{-1}(\mathbb{N})$$

~~$$\Rightarrow A = f^{-1}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\})$$~~

$$\Rightarrow A = f^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\}\right)$$

$$\Rightarrow A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(\{n\})$$

unión
numerable

conjuntos
numerales

Numerable!

||

