

MA1101-5 Introducción al Álgebra

Profesor: Maya Stein.

Auxiliar: Juan Pedro Ross.

Fecha: Jueves 5 de Mayo.



## Auxiliar 8: Cardinalidad

- |   |   |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math> A  \leq  B  \wedge  B  \leq  A  \Leftrightarrow  A  =  B </math></li> <li>• <math>A \subseteq B \Rightarrow  A  \leq  B </math></li> <li>• Si <math>A</math> es infinito, entonces <math> \mathbb{N}  \leq  A </math></li> <li>• <math>\mathbb{Q}</math> y <math>\mathbb{Z}</math> son numerables.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• La unión numerable de conjuntos numerables es numerable.</li> <li>• Si <math>A, B</math> son conjuntos numerables, entonces <math>A \times B</math> es numerable.</li> </ul> |
|---|---|

**P1.** Sean  $A, B, C$  conjuntos infinitos tales que  $A \cap B = \emptyset$ ,  $A \cap C = \emptyset$  y  $|B| = |C|$ . Demuestre que  $|A \cup B| = |A \cup C|$ .

**P2.** Sean  $A$  y  $B$  conjuntos no vacíos. Demuestre que  $|A \times B| = |B \times A|$ .

**P3.** Sea  $\mathcal{C}$  el conjunto de todas las circunferencias en el plano cartesiano cuyos centros tienen coordenadas racionales y su radio es racional. Es decir,  $C \in \mathcal{C} \Leftrightarrow C$  es una circunferencia de centro  $(a, b)$  y radio  $r$  con  $a, b, r \in \mathbb{Q}$ . Pruebe que el conjunto de todos los pares de puntos  $(P, Q)$ , donde  $P$  y  $Q$  son los extremos de los diámetros horizontales de las circunferencias de  $\mathcal{C}$ , es infinito numerable.

**P4.** Otra forma de definir  $\binom{n}{k}$  es "El total de subconjuntos de  $k$  elementos que se pueden formar a partir de un conjunto de  $n$  elementos".

(a) Demuestre que para cualquier conjunto finito  $A$ ,  $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$ .

(b) Demuestre, sin usar inducción, que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $n < 2^n$ .

**P5.** Sea  $A$  un conjunto y  $f : A \rightarrow \mathbb{N}$  una función. Demuestre que si  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f^{-1}(\{n\})$  es numerable, entonces  $A$  es numerable.