UChile	**Introducción al Álgebra**	**Mauricio Telias**
FCFM	**MA1101-1**	**Tomás Gonzalez**
DIM	**Otoño '09**	**Víctor Riquelme**

Resolución de Guía de Problemas 7 :
Sumatorias

P1 **(a)** Notemos en primer lugar que $1+\frac{1}{k}=\frac{k+1}{k}$, con lo que $\sum_{k=n}^{m} log(1+\frac{1}{k})=\sum_{k=n}^{m} log(\frac{k+1}{k})$. Por propiedad conocida del logaritmo esto es $\sum_{k=n}^{m} log(k+1)-log(k)$, donde reconocemos una suma telescópica. Aplicando la propiedad para este tipo de sumas, sigue que el resultado buscado es igual a $log(m+1)-log(n)$, o, si se prefiere, $log(\frac{m+1}{n})$.

(b) En primer lugar, notemos que si la suma fuera $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!}$, entonces multiplicando y dividiendo por $n!$, y aplicando el teorema del binomio de Newton llegaríamos a $\frac{2^n}{n!}$.

Sin embargo la suma no parte de 0 ni llega hasta n. Lo mejor en estos casos es sencillamente agregar los términos que nos faltan (que solo son dos y perfectamente calculables), cuidando por supuesto de restarlos también para mantener la igualdad, esto es:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!(n-k)!}=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}-\frac{1}{n!}-\frac{1}{n!}$$

Y por lo dicho recién, llegamos al resultado final

$$=\frac{2^n}{n!}-\frac{2}{n!}$$

P2 Definamos $k=\frac{m(m-1)}{2}$ y $l=\frac{m(m+1)}{2}$. Entonces lo pedido es

$$\begin{aligned}
\sum_{i=\frac{m(m-1)}{2}+1}^{\frac{m(m+1)}{2}}(2i-1) &= \sum_{i=k+1}^{l}(2i-1)\\
&= \sum_{i=1}^{l}(2i-1)-\sum_{i=1}^{k}(2i-1)\\
&= 2\sum_{i=1}^{l}i-\sum_{i=1}^{l}1-\left(2\sum_{i=1}^{k}i-\sum_{i=1}^{k}1\right)\\
&= 2\frac{l(l+1)}{2}-l-\left(2\frac{k(k+1)}{2}-k\right)\\
&= l(l+1)-l-k(k+1)+k\\
&= l^2-k^2\\
&= (l-k)(l+k)\\
&= \left(\frac{m(m+1)}{2}-\frac{m(m-1)}{2}\right)\left(\frac{m(m+1)}{2}+\frac{m(m-1)}{2}\right)\\
&= \frac{m^2}{4}\left((m+1)-(m-1)\right)\left((m+1)+(m-1)\right)\\
&= \frac{m^2}{4}(2)(2m)\\
&= m^3
\end{aligned}$$

P3 Lo primero que haremos será racionalizar (este procedimiento es habitual para sumatorias que incluyen raíces). Tenemos

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})} \frac{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}{k(k+1)(k+1-k)}$$

Notando que $k+1-k=1$ y que $\sqrt{k(k+1)}\sqrt{k+1}=(k+1)\sqrt{k}$, $\sqrt{k(k+1)}\sqrt{k}=k\sqrt{k+1}$, es fácil darse cuenta de que podemos separar el numerador en lo anterior para llegar a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)\sqrt{k}}{k(k+1)} - \frac{k\sqrt{k+1}}{k(k+1)}$$

Lo que a su vez es igual a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

Reconocemos aquí una suma telescópica, con lo que el resultado final es igual a $1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$

P4 Vamos a probar que $(x-y)\sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1-i}y^i = x^n - y^n$, pues $x \neq y$.

$$\begin{aligned}
(x-y)\sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1-i}y^i &= x\sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1-i}y^i - y\sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1-i}y^i \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} x^{n-i}y^i - \sum_{i=0}^{n-1} x^{n-(i+1)}y^{i+1} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} x^{n-i}y^i - \sum_{j=1}^{n} x^{n-j}y^j && \text{cambio de indice } j=i+1 \\
&= x^{n-0}y^0 - x^{n-n}y^n && \text{suma telescópica} \\
&= x^n - y^n
\end{aligned}$$

P5 **(a)** Calculemos $f*f(n)$, donde f es la función idénticamente igual a 1. Por definición de $*$ (obs: este producto de funciones se conoce como **Producto de Convolución discreta**) queda que, para cada $n \in \mathbb{N}$

$$f*f(n) = \sum_{k=0}^{n} f(k)f(n-k) = \sum_{k=0}^{n} 1\cdot 1 = n+1$$

donde usamos que f es 1 independientemente de dónde se evalúe. Veamos ahora $f*g$ donde g es la identidad:

$$f*g(n) = \sum_{k=0}^{n} f(k)g(n-k) = \sum_{k=0}^{n} n-k$$

Donde usamos la definición de f y g. Es fácil darse cuenta (haciendo un cambio de índice y usando la conmutatividad de la suma) que esto es igual a $\sum_{k=0}^{n} k$, lo que es por propiedad concocida igual a $\frac{n(n+1)}{2}$. **Obs:** Esto podría haber salido sin el cambio de índice haciendo $g*f(n)$ en vez de $f*g(n)$

según la definición dada. Queda como ejercicio propuesto para ustedes demostrar que esto es válido en general, es decir, que la convolución es conmutativa en las funciones.
Finalmente veamos qué pasa con $g * g(n) = \sum_{k=0}^{n} g(k)g(n-k) = \sum_{k=0}^{n} k(n-k)$
Podemos separar esta suma en dos sumas conocidas: $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ y $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, con lo que todo resulta igual a

$$\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)}{2}(1 - \frac{2n+1}{3}) = n(n+1)(\frac{1-n}{3})$$

.

(b) Por definición de la convolución, sigue que

$$f * g(n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \frac{b^{n-k}}{(n-k)!}$$

Con lo que multiplicando todo por $n!$, sigue que es igual a

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$$

Donde en el último término reconocemos un binomio de Newton.

P6 Sea $S_n = \sum_{k=0}^{n} (1-x)^k$, entonces se sabe (o es facil probar) que

$$S_n = \frac{(1-x)^{n+1} - 1}{(1-x) - 1}$$

Ademas, vamos a usar el teorema del binomio de Newton:

$$(1-x)^{n+1} = \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} (-x)^j 1^{n+1-j} = \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} (-1)^j x^j$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{(1-x)^{n+1} - 1}{(1-x) - 1} \\
&= \frac{1 - (1-x)^{n+1}}{x} \\
&= \frac{1 - \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} (-1)^j x^j}{x} \\
&= \frac{1 - \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} (-1)^j x^j - 1}{x} \\
&= \frac{- \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} (-1)^j x^j}{x} \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} (-1)^{j+1} x^{j-1} \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} (-1)^{j-1} x^{j-1} \\
&= \sum_{l=0}^{n} \binom{n+1}{l+1} (-1)^l x^l \qquad \text{cambio de variable } l = j-1
\end{aligned}$$

P7 En primer lugar notemos que la suma de verdad empieza con $k = 1$, ya que para $k = 0$ se tiene que $k7^k\binom{n}{k} = 0$. Luego podemos calcular

$$\sum_{k=1}^{n} k7^k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} 7^k k \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Notando que $\frac{k}{k!} = \frac{1}{(k-1)!}$, $n! = n(n-1)!$ y además que $(n-k)! = (n-1-(k-1))!$, sigue que todo es igual a

$$n \sum_{k=1}^{n} 7^k \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} 7^k \cdot 1^{n-1-(k-1)}$$

Haciendo el cambio de índice $j = k-1$, sigue que podemos reescribir como

$$n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} 7^k \cdot 1^{n-1-j}$$

Donde reconocemos un binomio de Newton para concluir que la suma completa es igual a $n(7+1)^{n-1} = n8^{n-1}$

P8 **(a)**

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k} &= \frac{n!}{(n-k)!k!} \frac{(n-k)!}{((n-k)-(i-k))!(i-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-i)!(i-k)!} \\
&= \frac{n!}{(n-i)!i!} \frac{i!}{(i-k)!k!} \\
&= \binom{n}{i}\binom{i}{k}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i}\binom{i}{k} &= \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k} \\
&= \binom{n}{k} \sum_{i=k}^{n} \binom{n-k}{i-k} \\
&= \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} & \text{cambio de indice } j = i-k \\
&= \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} 1^{n-k-j} 1^j \\
&= \binom{n}{k} (1+1)^{n-k} \\
&= \binom{n}{k} 2^{n-k}
\end{aligned}$$

$\square$