



## Control 4

**P1.** a) (3,0 ptos.) Calcule el valor de la siguiente sumatoria para  $b \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$  fijo:

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} b^i.$$

b) Considere el conjunto  $A \neq \emptyset$  y defina

$$\mathcal{F} = \{f : \{1, 2, 3\} \rightarrow A \mid f \text{ es función}\}.$$

(i) (1,5 ptos.) Demuestre que  $|\mathcal{F}| = |A|^3$ .

**Indicación:** Para  $f \in \mathcal{F}$  considere la tupla  $(f(1), f(2), f(3))$ .

(ii) (1,5 ptos.) Demuestre que si  $A$  es numerable entonces  $\mathcal{F}$  también es numerable.

**P2.** Definimos, para  $n \geq 1$ ,  $r \neq 1$

$$S_n = \sum_{k=1}^n k r^k.$$

a) (2,5 ptos.) Demuestre, **sin usar inducción** que

$$S_n = r(S_n - n r^n) + \sum_{k=0}^{n-1} r^{k+1}.$$

**Indicación:** Use cambio de índice en  $S_n$ .

b) (2,5 ptos.) Demuestre, **sin usar inducción** que

$$S_n = \frac{r - (n+1)r^{n+1} + n r^{n+2}}{(1-r)^2}.$$

c) (1,0 pto.) Calcule  $S_n$  en el caso en que  $r = 1$ .

Consultas sólo al auxiliar  
Justifique cada uno de sus pasos  
Tiempo: 1:15