

PAUTA AUXILIAR 7

P1) a)

$$\sum_{k=1}^n \sqrt[75]{k+2} - \sqrt[75]{k}$$

$$= \sum_{k=1}^n \sqrt[75]{k+2} - \sqrt[75]{k+1} + \sqrt[75]{k+1} - \sqrt[75]{k}$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^n (\sqrt[75]{k+2} - \sqrt[75]{k+1})}_{\text{Telescópica}} + \underbrace{\sum_{k=1}^n (\sqrt[75]{k+1} - \sqrt[75]{k})}_{\text{Telescópica}}$$

$$= \sqrt[75]{n+2} - \sqrt[75]{1+1} + \sqrt[75]{n+1} - \sqrt[75]{1}$$

$$= \sqrt[75]{n+2} + \sqrt[75]{n+1} - \sqrt[75]{2} - 1$$

b)

$$\sum_{k=0}^{2n} \sum_{j=0}^{4n-2k} (-1)^k \binom{2n}{2n-k} \binom{4n-2k}{j}$$

$$= \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{2n-k} \sum_{j=0}^{4n-2k} \binom{4n-2k}{j}$$

(Los términos que NO dependen de j salen)

$$= \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{2n-k} \underbrace{\sum_{j=0}^{4n-2k} \binom{4n-2k}{j} \cdot 1^j \cdot 1^{4n-2k-j}}_{\text{Binomio de Newton}}$$

(Hemos aparecer el Binomio de Newton)

• Se cumple que el límite superior de la sumatoria es igual a la parte de arriba del coeficiente Binomial ✓

• Se cumple que la sumatoria parte de 0 ✓

• Se cumple que la suma de los exponentes es igual a la parte de arriba de la sumatoria ✓

Ahora podemos aplicar Binomio de Newton y nos queda:

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{2n-k} (-1)^k \cdot (1+1)^{4n-2k} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{2n-k} (-1)^k 2^{2(2n-k)}$$

$$= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{2n-k} (-1)^k 4^{2n-k}$$

Ahora para usar Binomio de Newton, nos gustaría que

$$\binom{2n}{2n-k} = \binom{2n}{k}.$$

Veamos:

$$\binom{2n}{2n-k} = \frac{(2n)!}{(2n-k)! (2n - (2n-k))!}$$

$$= \frac{(2n)!}{(2n-k)! k!} = \binom{2n}{k}$$

entonces nos queda:

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k 4^{2n-k}$$

• Límite de sumatoria
= parte de arriba? ✓

• k parte de 0? ✓

• exponentes suman 2n? ✓

UTILIZANDO Binomio de Newton nuevamente, se obtiene

$$(-1+4)^{2n} = 3^{2n} = \boxed{9^n}$$

$$c) \sum_{k=3}^{n+1} \sum_{j=3}^{n+1} \binom{k}{2} \binom{j}{j-2} + 1 \cdot 1 \quad \leftarrow \text{Término } j=2 \text{ y } k=2$$

Más adelante se explica por qué es importante separar este término.

no depende de "j", así que podemos sacarlo de la primera sumatoria

$$n+1 = \sum_{k=3}^{n+1} \binom{k}{2} \underbrace{\sum_{j=3}^{n+1} \binom{j}{j-2}}_{=1} + 1$$

Desarrollemos esta sumatoria:

$$\sum_{j=3}^{n+1} \binom{j}{j-2} = \sum_{j=3}^{n+1} \frac{j!}{(j-2)! (j-(j-2))!} = \sum_{j=3}^{n+1} \frac{j(j-1)}{2}$$

Quando se simplifican los factoriales, se elimina un (j-2) arriba y abajo. Pero eso no se podría si j fuese 2. Por eso se separa antes.

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=3}^{n+1} j^2 - j = \frac{1}{2} \left[\sum_{j=3}^{n+1} j^2 - \sum_{j=3}^{n+1} j \right]$$

¡ambas son conocidas!

Pero cuando parten desde 1

Arregulemoslas:

$$= \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^{n+1} j^2 - 2^2 - 1^2 - \left(\sum_{j=1}^{n+1} j - 2 - 1 \right) \right]$$

Formulas conocidas
Ojo: Hasta "n+1"

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} - 4 - 1 - \frac{(n+1)(n+2)}{2} + 2 + 1 \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} - \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 2 \right] = A \quad \leftarrow \text{le llamaremos "A"}$$

Entonces nos queda:

$$\sum_{k=3}^{n+1} \binom{k}{2} A + 1 \text{ pero } A \text{ no depende de "k"}$$

$$\Rightarrow = A \sum_{k=3}^{n+1} \binom{k}{2} + 1 = A \sum_{k=3}^{n+1} \frac{k!}{(k-2)! 2!} + 1 = A \sum_{k=3}^{n+1} \frac{k(k-1)}{2} + 1$$

¡ es la misma

que teníamos antes!

pero esta depende de k en vez de j

Eso da ¡LO MISMO!

el resultado es el mismo, el nombre de la variable es arbitrario

$$= A \cdot A + 1 = A^2 + 1 //$$

P2]
$$\sum_{K=0}^n (1-x)^K = \sum_{K=0}^n (-1)^K \binom{n+1}{K+1} x^K$$

mmm... me suena a binomio de Newton

Pero ese $\binom{n+1}{K+1}$ ← debería ser un K
¡Cambio de índice!

$$\sum_{K=0}^n (-1)^K \binom{n+1}{K+1} x^K = \sum_{K=1}^{n+1} (-1)^{K-1} \binom{n+1}{K} x^{K-1}$$

↑
 Pero los límites suben
AMBOS

↗ ↘
 dentro de la sumatoria los K bajan

ENTONCES LA PARTE DE ARRIBA DE LA SUMATORIA ES IGUAL A LA PARTE DE ARRIBA del COEFICIENTE, y la de Abajo es un K ESTAMOS CASI LISTOS

pero el K parte de 1 ||
Bueno le agregamos el término 0
(pero también hay que quitárselo)

$$= \sum_{K=0}^{n+1} (-1)^{\overbrace{K-1}^{K-1}} \binom{n+1}{\overbrace{K}^{K-1}} x^{\overbrace{K-1}^{K-1}} - \underbrace{(-1)^{0-1}}_{-1} \underbrace{\binom{n+1}{0}}_1 \underbrace{x^{0-1}}_{x^{-1}}$$

$$= \sum_{K=0}^{n+1} (-x)^K \cdot \underbrace{(-x)^{-1}}_{\text{NO TIENE } K} \binom{n+1}{K} + x^{-1}$$

$$= (-x)^{-1} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-x)^k \boxed{?}^{n+1-k} + x^{-1}$$

SOLO FALTA
ESO

PERO SI ESTÁ
ES UN 1 

$$= (-x)^{-1} (1-x)^{n+1} + x^{-1}$$

$$= \frac{-(1-x)^{n+1} + 1}{x}$$

$$= \frac{-(1-x)^{n+1} + 1}{1 - (1-x)} = \sum_{k=0}^n (1-x)^k$$

P3] a) $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \star$

trabajemos primero el $k \binom{n}{k} = k \frac{n!}{(n-k)! k!}$

$$= \frac{\cancel{k} n!}{(n-k)! \cancel{k} (k-1)!} = \frac{n!}{(n-k)! (k-1)!}$$

me gustaría formar un nuevo combinatorio

para ello $n-k = x - (k-1)$

$$n - \cancel{k} = x - \cancel{k} + 1$$

$$\boxed{n-1 = x}$$

$\Rightarrow$ si arriba hubiese un $(n-1)!$
lo tendríamos... pero $n! = n \cdot (n-1)!$ //

$$\Rightarrow \star = \sum_{k=1}^n n \frac{(n-1)!}{(n-k)! (k-1)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

no depende de k

$$= n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$

Y RAZONAMOS IGUAL A LA P2]

$$= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^{k+1} (1-p)^{n-(k+1)}$$

$$= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k \cdot p (1-p)^{n-1-k}$$

$$= n p \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}$$

$$= n p (1-p+p)^{n-1}$$

$$= n p //$$

$$b) \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$= \sum_{i=0}^n \frac{1}{(2i-1)(2i+1)}$$

tratemos de
convertir esto en
una suma.

$$\frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{A}{(2i-1)} + \frac{B}{(2i+1)}$$

(2n-1) y (2n+1) tienen pinta de ser algo así como términos consecutivos. Nos gustaría usar telescópica pero para eso necesitamos que estén separados en dos fracciones. Intentemos separarlos:



$$\frac{A(2^i+1) + B(2^i-1)}{(2^i+1)(2^i-1)} = \frac{1}{(2^i+1)(2^i-1)}$$

SON IGUALES!
SOLO FALTA VER
ARRIBA.

$$2A^i + A$$

$$2A^i + A + 2B^i - B = 2^i(A+B) + A-B = \frac{1}{2^i}$$

ese lado no tiene "i"

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} A+B=0 \\ A-B=1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} A=\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\Rightarrow \star\star = \sum_{i=0}^n \frac{1}{2(2^i-1)} - \frac{1}{2(2^i+1)}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n \frac{1}{2^i-1} - \frac{1}{2^i+1}$$

Si tomamos $a_k = 1/(2^k-1)$, entonces

$$a_{k+1} = 1/(2^{k+1}-1) = 1/(2^{k+1})$$

Entonces tenemos términos consecutivos

NOTAR QUE
 $2^{(i+1)}-1 = 2^i+1$!

TENEMOS UNA TELESCÓPICA!

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2^{n+1}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}} \right)$$

$$= \frac{2^n}{2(2^{n+1})} = \frac{n}{2^{n+1}}$$

P4)
$$\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{18} = \sum_{k=0}^{18} \binom{18}{k} (x^2)^k \left(\frac{1}{x}\right)^{18-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{18} \binom{18}{k} x^{2k} \cdot x^{-1(18-k)} = \sum_{k=0}^{18} \binom{18}{k} x^{3k-18}$$

a) Término constante $\Leftrightarrow x^0$

Entonces necesitamos que $3k-18=0$

$$\Rightarrow 3k=18 \Rightarrow \underline{k=6}$$

Entonces el término constante es el sexto de la sumatoria:

$$\begin{aligned} \binom{18}{6} x^{3 \cdot 6 - 18} &= \binom{18}{6} = \frac{18!}{6!(18-6)!} \\ &= \frac{18!}{6!12!} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= 13 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 17 = \underline{18564} \end{aligned}$$

b)

Ya que la sumatoria va de 0 a 18, hay 19 términos y por lo tanto hay sólo un término central, que es el término 9. OJO que en este caso justo calza con que el término 9 es el x^9 , pero eso no necesariamente es así. El término 9 es el que corresponde a $k=9$

$$\text{término } 9: \binom{18}{9} x^{3 \cdot 9 - 18} = \frac{18!}{9!9!} x^9 = \frac{18 \cdot \dots \cdot 10}{9!} = 48620 x^9$$

c) necesitamos que $3K - 18 = 6$ para tener x^6

$$\Rightarrow 3K = 24 \Rightarrow K = 8$$

Entonces el valor del coeficiente de x^6 es

$$= \frac{18!}{8!(18-8)!} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 17 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 11 = \boxed{4862}$$