P1 $(a,b)\, R\, (c,d) \iff a+b \equiv_2 c+3d$ ← congruencia módulo 2.

* recordemos que $x \equiv_2 y \iff (y-x) = 2K, \quad k \in \mathbb{Z}$.

a) P.D.Q: R es de equivalencia (refleja, simétrica, transitiva)

- P.D.Q R es refleja $\forall (a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ $\big((a,b)R(a,b)\ \forall (a,b)\big)$

En efecto: $(a,b)\, R\, (a,b) \iff a+b \equiv_2 a+3b$

Entonces tenemos que ver que $(a+b)-(a+3b) = 2K, \; k\in\mathbb{Z}$

$(a+b)-(a+3b) = a+b-a-3b = -2b$

Pero sabemos que $b\in\mathbb{Z} \Rightarrow -b \in \mathbb{Z}$

$\therefore\ (a+b)-(a+3b) = 2K, \quad \text{con } K=-b \in \mathbb{Z}$

$\iff (a+b) \equiv_2 (a+3b)$

$\iff (a,b)\, R\, (a,b)$

$\iff$ R es refleja $\forall (a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

- P.D.Q: R es simétrica $\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ $\big((a,b)R(c,d) \Rightarrow (c,d)R(a,b)\big)$

En efecto: $(a,b)\, R\, (c,d) \iff a+b \equiv_2 c+3d$

$\iff (a+b)-(c+3d) = 2K, \quad K\in\mathbb{Z}.$ $(\star)$

* queremos demostrar que $(c,d)R(a,b) \iff (a+3b)-(c+d) = 2K$

Despejemos "b" en $(\star)$: $b = 2k + c + 3d - a$

veamos ahora cómo es $(a+3b)-(c+d)$ usando esa "b"

$= a + 6k + 3c + 9d - 3a - c - d = -2a + 2c + 8d + 6K = 2\underbrace{(-a+c+4d+3K)}_{K_2}$

y como $a,c,d,k \in \mathbb{Z}$, $(-a+c+4d+3k) \in \mathbb{Z}$

$\therefore$ si $(a,b)R(c,d)$, $(a+3b)-(c+d) = 2K_2 \iff (c+d) \equiv_2 (a+3b)$

$\iff (c,d)R(a,b)$ | $\therefore (a,b)R(c,d) \Rightarrow (c,d)R(a,b) \iff R$ es simétrica

• P.D.Q R es transitiva $\left((a,b)R(c,d) \wedge (c,d)R(e,f) \Rightarrow (a,b)R(e,f)\right)$

En efecto:

$$\left.\begin{aligned} (a,b)R(c,d) &\Leftrightarrow (a+b)-(c+3d) = 2k_1 \\ (c,d)R(e,f) &\Leftrightarrow (c+d)-(e+3f) = 2k_2 \end{aligned}\right\} \text{ Sumando estas 2 expresiones}$$

$k_1, k_2 \in \mathbb{Z}.$

$$a+b-c-3d+c+d-e-3f = 2k_1+2k_2$$

$$\Leftrightarrow (a+b)-(e+3f)-2d = 2k_1+2k_2$$

$$\Leftrightarrow (a+b)-(e+3f) = 2\underbrace{(k_1+k_2+d)}_{k_3 \in \mathbb{Z}}$$

(ya que $k_1, k_2, d \in \mathbb{Z}$)

$$\therefore (a+b)-(e+3f) = 2k_3, \quad k_3 \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow (a,b)R(e,f)$$

$$\therefore (a,b)R(c,d) \wedge (c,d)R(e,f) \Rightarrow (a,b)R(e,f)$$

$\Leftrightarrow$ R es transitiva.

ya que R es refleja, simétrica y transitiva, R es de equivalencia.

b) P.D.Q $[(0,0)]_R \cup [(0,1)]_R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \quad \wedge \quad [(0,0)]_R \cap [(0,1)]_R = \emptyset$

En efecto:

$$[(0,0)]_R = \{(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : (0,0) R (a,b)\}$$

$(0,0) R (a,b) \iff 0 \equiv_2 a+3b$

$\iff a+3b = 2k_1, \ k_1 \in \mathbb{Z}.$

$$[(0,1)]_R = \{(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : (0,1) R (a,b)\}$$

$(0,1) R (a,b) \iff 1 \equiv_2 a+3b$

$\iff a+3b-1 = 2k_2, \ k \in \mathbb{Z}$

$\iff a+3b = 2k_2+1$

Resumiendo:

$(a,b) \in [(0,0)]_R \iff a+3b = 2k_1, \ k_1 \in \mathbb{Z}$ ("$a+3b$ es par")

$(a,b) \in [(0,1)]_R \iff a+3b = 2k_2+1, \ k_2 \in \mathbb{Z}$ ("$a+3b$ es impar")

Pero $a+3b$ siempre va a ser o par o impar, es decir

$(a,b) \in [(0,0)]_R \vee (a,b) \in [(0,1)]_R \quad \forall (a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

$\therefore$ si tomo los pares ordenados $(a,b) \in [(0,0)]_R$ y los uno a los pares ordenados en $[(0,1)]_R$, tengo todos los pares ordenados posibles.

Es decir, $[(0,0)]_R \cup [(0,1)]_R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Así mismo, no es posible que $a+3b$ sea par e impar a la vez, y por lo tanto $[(0,0)]_R \cap [(0,1)] = \emptyset$

c) Es directo de (b) que $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/R = \{[(0,0)]_R, [(0,1)]_R\}$

ya que todos los pares ordenados $(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ pertenecen a alguna de esas 2 clases de equivalencia.

P2) $xRy \iff b \mid ax+y$ ("b divide a $ax+y$" $\iff ax+y = kb,\ k\in\mathbb{Z}$)

a) P.D.Q R es refleja $\iff b \mid (a+1)$

$\Rightarrow$) Hip: R es refleja

$\iff xRx \quad \forall x \in \mathbb{Z}$

$\iff b \mid ax+x$

$\iff b \mid x(a+1)$

y como se tiene que cumplir $\forall x$, necesariamente $b \mid (a+1)$

$\Leftarrow$) Hip: $b \mid a+1$

P.D.Q xRx

$\iff b \mid ax+x$

$\iff b \mid (a+1)x$

Como $b \mid (a+1)$, necesariamente $b \mid (a+1)x$

$\therefore xRx$

$\iff$ x es refleja.

b) P.D.Q $\quad R$ simétrica $\Rightarrow b \mid (a^2-1)$

en efecto: R simétrica $\Leftrightarrow \quad xRy \Rightarrow yRx$

$\Leftrightarrow \quad b \mid ax+y \Rightarrow b \mid ay+x$

$\Leftrightarrow \quad bk_1 = ax+y \Rightarrow bk_2 = ay+x \qquad k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$

$y = bk_1 - ax$

reemplazando y acá:

$bk_2 = a(bk_1 - ax) + x$

$\Leftrightarrow \quad bk_2 = abk_1 - a^2x + x$

$\Leftrightarrow \quad a^2x - x = abk_1 - bk_2$

$\Leftrightarrow \quad x(a^2-1) = b\underbrace{(ak_1 - k_2)}_{k_3 \in \mathbb{Z}}$

$\Leftrightarrow \quad bk_3 = x(a^2-1)$

$\Leftrightarrow \quad b \mid x(a^2-1)$

Pero como debe cumplirse $\forall x \in \mathbb{Z}$, necesariamente $b \mid a^2-1$.

$\therefore \; R$ simétrica $\Rightarrow b \mid a^2-1$.

c) Sea $a=3$ y $b=4$, entonces

$$xRy \iff 4 \mid 3x+y$$

P.D.Q: R es de equivacencia

- P.D.Q R es refleja (xRx)

En efecto $xRx \iff 4 \mid 3x+x$

Es claro que $4 \mid 4x \quad \forall x$

$\therefore$ R es refleja

- P.D.Q R es simétrica ($xRy \Rightarrow yRx$)

En efecto:

$xRy \iff 4 \mid 3x+y$

$\iff 4K = 3x+y$

$\Rightarrow y = 4K - 3x$

Veamos entonces como es $3y+x$

$$3(4K-3x)+x = 12K-9x+x = 12K-8x = 4\underbrace{(3K-2x)}_{K_2 \in \mathbb{Z}}$$

$\therefore 4K_2 = 3y+x$

$\iff 4 \mid 3y+x$

$\iff yRx$

$\therefore xRy \Rightarrow yRx$

$\iff$ R es simétrica

• P.D.Q : R es transitiva ($xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$)

en efecto:

$$\left.\begin{array}{l} xRy \iff 4k_1 = 3x+y \\ yRz \iff 4k_2 = 3y+z \end{array}\right\} \text{sumando}$$

$$4k_1+4k_2 = 3x+y+3y+z$$

$$\iff 4k_1+4k_2-4y = 3x+z$$

$$\iff 4(\underbrace{k_1+k_2-y}_{k_3 \in \mathbb{Z}}) = 3x+z$$

$$\iff 4k_3 = 3x+z$$

$$\iff 4 \mid 3x+z$$

$$\iff xRz$$

$$\therefore \; xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$$

$$\iff R \text{ es transitiva}$$

ya que R es refleja, simétrica y transitiva, R es de equivalencia.

Ahora veamos el conjunto cuociente. Veamos algunas clases de equivalencia:

$[0]_R = \{ x \text{ en } Z : 0Rx\}$
$0Rx \iff 4 \mid x \iff 4k = x$, con k entero
$\Rightarrow [0]_R = \{x = 4k , k \text{ entero}\}$

$[1]_R = \{ x \text{ en } Z : 1Rx\}$
$1Rx \iff 4 \mid 3 + x \iff 4k = 3 + x$, con k entero
$\Rightarrow [1]_R = \{x = 4k - 3 , k \text{ entero}\}$

$[2]_R = \{ x \text{ en } Z : 2Rx\}$
$2Rx \iff 4 \mid 6 + x \iff 4k = 6 + x$, con k entero
$\Rightarrow [2]_R = \{x = 4k - 6 , k \text{ entero}\}$

$[3]_R = \{ x \text{ en } Z : 3Rx\}$
$3Rx \iff 4 \mid 9 + x \iff 4k = 9 + x$, con k entero
$\Rightarrow [3]_R = \{x = 4k - 9 , k \text{ entero}\}$

$[4]_R = \{ x \text{ en } Z : 4Rx\}$
$4Rx \iff 4 \mid 12 + x \iff 4k = 12 + x$, con k
$\Rightarrow [4]_R = \{x = 4k - 12 = 4(k-3) , k \text{ entero}\}$

Pero k-3 también es un entero! Llamémoslo k2.
Entonces $[4]_R = \{x = 4k - 12 = 4k2 , k2 \text{ entero}\}$
Pero es la misma que la del 0!

Y así en adelante se van a empezar a repetir, por lo que el conjunto cuociente es:

$\{ [0]_R, [1]_R, [2]_R, [3]_R \}$

P3)

$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{1+n} \quad \forall n \geq 1 \quad (*) \Rightarrow a_n = a_{n+1} - \dfrac{1}{n+1}$

P.D.Q $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = (n+1)a_n - n$

Paso 1: caso base

$n = 1$

$\displaystyle\sum_{i=1} a_i = a_1 = 1 \quad \Big| \quad (1+1)a_1 - 1 = 2\cdot 1 - 1 = 1$

$1 = 1$ //

$\therefore$ Para $n=1$ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = (n+1)a_n - n$

Paso 2: Hipótesis de inducción:

para algún $n \geq 1$ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = (n+1)a_n - n$

Paso 3: Paso inductivo

P.D.Q $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} a_i = ((n+1)+1)a_{n+1} - (n+1) = (n+2)a_{n+1} - (n+1)$

En efecto:

H. I.

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=n+1}^{n+1} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1} = (n+1)a_n - n + a_{n+1}$$

(usando (*))

$$= (n+1)\left(a_{n+1} - \frac{1}{n+1}\right) - n + a_{n+1} = (n+1)a_{n+1} - 1 - n + a_{n+1}$$

R

$$= (n+2)a_{n+1} - (n+1) \text{ //}$$

$\therefore \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} a_i = (n+2)a_{n+1} - (n+1)$

$\therefore \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = (n+1)a_n - n \quad \forall n \geq 1$

P4) Recordemos el principio de inducción fuerte:

$$\left\{ \left[p(k_0) \wedge p(k) \quad \forall k,\ k_0 \leq k < n \right] \Rightarrow \left[p(n) \right] \right\} \Leftrightarrow \left[\forall n \geq n_0\ p(n) \right]$$

Lado izquierdo
En palabras: "Si se cumple para un caso inicial y para todos los mayores que ese caso y menores que n, entonces se cumple para n"

Paso 1: Caso base $n=2$

2 es primo, por lo tanto, es directo que pueda escribirse como el producto de factores primos.

Paso 2: Hipótesis de inducción

$\forall k \geq 2 \wedge k < n$ k se puede escribir como el producto de factores primos.

Paso 3: Paso inductivo

Sea $n \in \mathbb{N}$

Hay 2 opciones:
- n es primo: en este caso estamos listos ✓.
- n no es primo: esto significa que n se puede escribir como

$$n = p \cdot q \qquad p, q < n$$

Por H.I, p y q se pueden escribir como productos de factores primos $\Rightarrow$ $p \cdot q$ se puede escribir así.

∴ n se puede escribir como producto de factores primos.

∴ $\forall n \geq 2$ n se puede escribir como producto de factores primos. //

P5) P.D.Q $\forall n \geq 1$ $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1}$

Paso 1 : caso base

n=1

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} = 1 \qquad \frac{3}{2} - \frac{1}{1+1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$1 \geq 1 \ //$$

∴ Para $n=1$ $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1}$

Paso 2: Hipótesis de inducción

para algún $n \geq 1$ $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1}$

Paso 3 : Paso inductivo

P.D.Q $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{n+2}$

En efecto: $$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \overset{H.I}{\geq} \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

P.D.Q: $-\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}\right) \geq \frac{-1}{n+2}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+1)-1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n+2}$$

$$\Leftrightarrow n(n+2) \leq (n+1)^2$$

$$\Leftrightarrow n^2+2n \leq n^2+2n+1$$

$$\Leftrightarrow V$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} \geq \frac{3}{2}-\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}\right) \geq \frac{3}{2}-\frac{1}{n+2}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \geq \frac{3}{2}-\frac{1}{(n+1)} \quad \forall n \geq 1 \ //.$$

P6] P.D.Q Ω es de orden $\Leftrightarrow$ f inyectiva

$\Rightarrow$] Hip: Ω es de orden,

en particular es antisimétrica

$\Leftrightarrow$ $x \Omega y \wedge y \Omega x \Rightarrow x = y$

$\Leftrightarrow$ $\underbrace{f(x) R f(y) \wedge f(y) R f(x)} \Rightarrow x = y$

$\Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

(pq' R es de orden)

$\Leftrightarrow$ f es inyectiva.

$\Leftarrow$] Hip: f inyectiva $(f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$

P.D.Q Ω es de orden

- P.D.Q Ω es refleja

$x \Omega x \Leftrightarrow f(x) R f(x)$

como R es refleja, $f(x) R f(x)$ $\forall x$

$\therefore$ Ω es refleja

- P.D.Q Ω es antisimétrica $(x \Omega y \wedge y \Omega x \Rightarrow x = y)$

En efecto

$$\left.\begin{array}{l} x \Omega y \Leftrightarrow f(x) R f(y) \\ y \Omega x \Leftrightarrow f(y) R f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

(pq' f es inyectiva)

(pq' R es antisim.)

$\therefore$ Ω es antisimétrica

• P.D.Q Ω es transitiva $(x \Omega y \wedge y \Omega z \Rightarrow x \Omega z)$

En efecto:

$$\left.\begin{array}{ll} x\Omega y \Leftrightarrow & f(x) \, R \, f(y) \\ y \Omega z \Leftrightarrow & f(y) \, R \, f(z) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \, R f(z) \Leftrightarrow x \Omega z \quad //$$

(pq' R es trans.)

$\therefore$ Ω es transitiva

$\therefore$ R es de orden $\Leftrightarrow$ f inyectiva.

P7 | P.D.Q $(x-y)$ es factor de $x^n - y^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow$ $(x-y)k = x^n - y^n$ $k \in \mathbb{Z}$

Paso 1: caso base

$n=0$

P.D.Q $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $(x-y)k = x^0 - y^0 = 1-1=0$

Basta tomar $k=0 \in \mathbb{Z}$

y se cumple.

$\therefore$ $(x-y)$ es factor de $x^n - y^n$ para $n=0$

Paso 2: Hipótesis de inducción

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists K \in \mathbb{Z} \text{ tal que } (x-y)K = x^n - y^n$$

Paso 3: Paso inductivo

P.D.Q $(x-y)$ es factor de $x^{n+1} - y^{n+1}$

En efecto

$$x^{n+1} - y^{n+1} = x^n \cdot x - y^n \cdot y$$

$$= \left(x^n + y^n - y^n\right)x - y^n y$$

$$= \left(x^n - y^n\right)x + y^n x - y^n y$$

$$\overset{H.I}{=} k(x-y)x + y^n(x-y)$$

$$= (x-y)\underbrace{(kx + y^n)}_{k_2 \in \mathbb{Z}}$$

$$\therefore x^{n+1} - y^{n+1} = k_2(x-y)$$

$\Rightarrow$ $x-y$ es factor de $x^{n+1} - y^{n+1}$

$\therefore \forall n \in \mathbb{N}$ $(x-y)$ es factor de $x^n - y^n$