MA1101-5 Introducción al Álgebra
Profesor: Maya Stein.
Auxiliar: Juan Pedro Ross.
Fecha: Martes 19 de Abril.

Auxiliar Extra: Control 3

P1. Sea $\mathcal{R}$ la relación en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por:

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \Leftrightarrow a + b \equiv_2 c + 3d$$

(a) Pruebe que $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia.

(b) Muestre que $[(0,0)]_{\mathcal{R}} \cup [(1,0)]_{\mathcal{R}} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y que $[(0,0)]_{\mathcal{R}} \cap [(1,0)]_{\mathcal{R}} = \emptyset$.

(c) Determine $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\mathcal{R}$.

P2. Dados $a, b \in \mathbb{N}$ fijos, con $a \geq 1$ y $b \geq 2$ se define en $\mathbb{Z}$ la relación $\mathcal{R}$ por:

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow b|ax + y, \text{ es decir, } b \text{ divide a } ax + y$$

(a) Demuestre que $\mathcal{R}$ es refleja si y sólo si $b|(a + 1)$.

(b) Demuestre que si $\mathcal{R}$ es simétrica, entonces $b|(a^2 - 1)$.

(c) Demuestre que para $a = 3$ y $b = 4$, $\mathcal{R}$ es relación de equivalencia y encuentre $\mathcal{Z}/\mathcal{R}$

P3. Sea la sucesión definida por:

$$a_1 = 1, \;\; a_{n+1} = a_n + \frac{1}{1+n}, \forall n \geq 1.$$

Pruebe usando inducción que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = (n+1)a_n - n$$

P4. El teorema fundamental de la aritmética nos dice que todo número natural se puede escribir como el producto de factores primos. Usando inducción fuerte demuestre este teorema.

P5. Demuestre por inducción que $(\forall n \geq 1) \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1}$.

P6. *[Propuesto]* Sea $f : A \to B$ una función y $\mathcal{R}$ una relación de orden en B. Se define la relación Ω en A como $x\Omega y \Leftrightarrow f(x)\mathcal{R}f(y)$. Demuestre que Ω es una relación de orden en A si y solo si f es inyectiva.

P7. *[Propuesto]* Sean x, y dos números reales distintos. Demuestre por inducción que

$$(\forall n \in \mathbb{N})(x - y) \text{ es factor de } x^n - y^n.$$