MA1101-3 Introducción al Álgebra.
Profesor: Pablo Dartnell R.
Auxiliar: Felipe Atenas M.

Resumen Control 3

A continuación se presenta un resumen de los contenidos del control 3 del curso Introducción al Álgebra. Ojo que es un resumen, por lo que puede no contener todo lo necesario para el control, pero sí lo esencial. Mi consejo es que ustedes mismos elaboren su propio resumen, porque son ustedes mismos los que saben qué cosas manejan bien y las que no manejan tan bien. Consideraremos que $\mathcal{R}$ es una relación en $A \times B^{(*)}$.

Relaciones

1. Relación: Llamamos relación entre dos conjuntos A y B a un conjunto $\mathcal{R} \subseteq A \times B$. Denotamos $a\mathcal{R}b$ cuando $(a,b) \in \mathcal{R}$. $^{(*)}$ En general, nos preocuparemos de las relaciones de un conjunto en sí mismo: $\mathcal{R} \subseteq A \times A$.
2. Tipos de relaciones:
   - Refleja: $(\forall x \in A)\ x\mathcal{R}x$
   - Simétrica: $(\forall x, y \in A)\ x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$
   - Antisimétrica: $(\forall x, y \in A)\ (x\mathcal{R}y \ \wedge \ y\mathcal{R}x) \Rightarrow \ x = y$
   - Transitiva: $(\forall x, y, z \in A)\ (x\mathcal{R}y \ \wedge \ y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$
3. Relación de orden: es refleja, antisimétrica y transitiva.
4. Si $\mathcal{R}$ es un orden y $(a,b) \in \mathcal{R}$: Se dice que a y b son comparables $\Leftrightarrow (\forall a, b \in A)(a\mathcal{R}b \ \vee \ b\mathcal{R}a)$
5. Si $\mathcal{R}$ es un orden: se dice que $\mathcal{R}$ es un orden total si $\forall a, b \in A$, a y b son comparables.
6. Si $\mathcal{R}$ es un orden: se dice que $\mathcal{R}$ es un orden parcial si $\exists a, b \in A$ tales que a y b no son comparables (... es solo negar que sea un orden total).
7. Ejemplo importante de relación de orden parcial: la divisibilidad.
   Decimos que a *divide a* b, simbolizado $a|b$, ssi existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $b = k \cdot a$.
8. Relación de equivalencia: es refleja, simétrica y transitiva.
9. Clase de Equivalencia: Dado $a \in A$, definimos su clase de equivalencia asociada a $\mathcal{R}$ como:

$$[a]_{\mathcal{R}} = \{x \in A \ : a\mathcal{R}x\}$$

   En simples palabras, es el conjunto de todos los elementos relacionados con a, con $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia.
10. Propiedades de una relación de equivalencia $\mathcal{R}$. Sean $x, y \in A$.
    - $[x]_{\mathcal{R}} \neq \phi$
    - $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow [x]_{\mathcal{R}} = [y]_{\mathcal{R}}$
    - $x\not\mathcal{R}y \Leftrightarrow [x]_{\mathcal{R}} \cap [y]_{\mathcal{R}} = \phi$
    - $[x]_{\mathcal{R}} \neq [y]_{\mathcal{R}} \Leftrightarrow [x]_{\mathcal{R}} \cap [y]_{\mathcal{R}} = \phi$
11. Conjunto Cuociente: $A/\mathcal{R}$. Corresponde al conjunto cuyos elementos son todas las clases de equivalencia (distintas) inducidas sobre A por la relación de equivalencia $\mathcal{R}$. Es decir:

$$C \in A/\mathcal{R} \Leftrightarrow (\exists x \in A)\ C = [x]_{\mathcal{R}}$$

12. Partición: Sea A un conjunto no vacío. Una colección de conjuntos $\{P_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathcal{P}(A)$ se llamará partición de A si:

- $P_i \neq \emptyset$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$
- $(\forall i, j \in \{1, ..., n\})\ i \neq j \Rightarrow P_i \cap P_j = \emptyset$
- $A = \bigcup_{i=1}^{n} P_i$
  En simpleas palabras, se tiene que la familia de conjuntos $\{P_i\}_{i=1}^{n}$ es una partición de A si todos los conjuntos P_i son no vacíos y su unión disjunta es igual a A.

13. Propiedad: Para un conjunto $A \neq \emptyset$, toda relación de equivalencia induce sobre el conjunto una partición (formada por todas las clases de equivalencia de los elementos de A) y, a la inversa, dada una partición $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i \in I}$ (el conjunto I es un conjunto de índices) de A, siempre es posible asociarle una relación de equivalencia inducida por la partición.

14. Teorema de la división: Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Existe un único par $q, r \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$a = q \cdot b + r \text{ y } 0 \leq r < |b|$$

15. Ejemplo importante de relación de equivalencia: la congruencia modular.
Sea $p \in \mathbb{N}$. En $\mathbb{Z}$ definimos la relación llamada congruencia módulo p:

$$x \equiv_p y \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})(x - y = kp)$$

Esto es equivalente a decir que la diferencia es múltiplo de p, o bien que la diferencia es divisible por p. Como $\equiv_p$ es una relación de equivalencia sobre $\mathbb{Z}$, entonces induce una partición: en $\mathbb{Z}$ induce clases de equivalencia y al conjunto cuociente $\mathbb{Z}/\equiv_p$ lo llamamos simplemente $\mathbb{Z}_p$.

16. Propiedad: $\mathbb{Z}_p = \{[0]_p, [1]_p, ..., [p-1]_p\}$. En particular, $\mathbb{Z}_p$ tiene p elementos.
Extra: Qué pasa cuando $p = 2$?

Principio de Inducción

1. Principio de Inducción matemática (primera forma)
Sea $P(n)$ una propiedad sobre los números naturales mayores o iguales que n_0 (un número natural fijo), tal que se verifica:

   - Caso base: $P(n_0)$ es verdadera.
   - $(\forall n \geq n_0)$ [$P(n)$ es verdadera $\Rightarrow P(n+1)$ es verdadera] (es decir, para todo natural mayor o igual que $n_0 \in \mathbb{N}$ la implicancia se cumple)

   Esto equivale a: $(\forall n \geq n_0)\ P(n)$ es verdadera.
   Comentarios: para demostrar con este principio, se debe hacer lo siguiente:

   - Verificar que se cumple el caso base, es decir, ver que $P(n_0)$. Es típico que $n_0 = 0$ o $n_0 = 1$, pero depende del caso.
   - Suponer la hipótesis inductiva (HI), es decir, que tenemos un $n \in \mathbb{N}$ tal que cumple la propiedad $P(n)$.
   - Se demuestra (usando la HI) que se tiene $P(n+1)$.

2. Principio de Inducción matemática (segunda forma)
Sea $P(n)$ una propiedad sobre los números naturales mayores o iguales que n_0 (un número natural fijo), tal que se verifica:

   - Caso base: $P(n_0)$ es verdadera.
   - $(\forall n \geq n_0)$ [$P(n_0), ..., P(n-1)$ son todas verdaderas $\Rightarrow P(n)$ es verdadera].

   Esto equivale a: $(\forall n \geq n_0)\ P(n)$ es verdadera.
   Comentarios: para demostrar con este principio, se debe hacer lo siguiente:

- Verificar que se cumple el caso base, es decir, ver que $P(n_0)$. Es típico que $n_0 = 0$ o $n_0 = 1$, pero depende del caso.
- Suponer la hipótesis inductiva (HI), es decir, suponer que la propiedad se cumple para todos los naturales entre n_0 y $n-1$ (incluyendo este último).
- Se demuestra (usando la HI) que se tiene $P(n)$.

Sumatorias

1. Sumatoria. Sea $(a_i)_{i\geq 0} = \{a_0, a_1, ...\}$ un conjunto de númeos reales (una sucesión), usamos la siguiente notación para representar la suma de los primeros $n+1$ elementos de la sucesión:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + a_1 + ... + a_n$$

2. Propiedades:

   - Suma de unos:
   $$\sum_{i=N}^{M} 1 = M - N + 1$$
   - Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y dos secuencias $(a_i)_{i=0}^{n}$, $(b_i)_{i=0}^{n}$ (las secuencias pueden partir de $i = 1$, ojo con las especificaciones del problema):
   $$\sum_{i=0}^{n} \lambda a_i = \lambda \sum_{i=0}^{n} a_i, \quad \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=0}^{n} a_i + \sum_{i=0}^{n} b_i$$
   - Traslación de índice. Si $s \in \mathbb{N}$:
   $$\sum_{i=N}^{M} a_i = \sum_{i=N-s}^{M-s} a_{i+s} = \sum_{i=N+s}^{M+s} a_{i-s}$$
   - Particionar una suma. Si $N \leq J < M$:
   $$\sum_{i=N}^{M} a_i = \sum_{i=N}^{J} a_i + \sum_{i=J+1}^{M} a_i$$

3. Propiedad Telescópica:

$$\sum_{i=N}^{M} (a_i - a_{i+1}) = a_N - a_{M+1}$$

Cualquier comentario o consulta a felipe.e.atenas@gmail.com
Éxito en el estudio!