UChile	**Introducción al Álgebra**	**Mauricio Telias**
FCFM	**MA1101-1**	**Tomás Gonzalez**
DIM	**Otoño '09**	**Víctor Riquelme**

Resolución de Guía de Problemas 6 :
Inducción

P1 El caso base sale fácilmente, ya que para $n = 1$ se tiene que la suma es

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

Supongamos ahora cierta la propiedad para n y veámoslo para $n + 1$:
Basta con notar que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+2} \frac{1}{k+n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k+n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} \\ &\leq \frac{5}{6} + - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3}\end{aligned}$$

Lo último por la hipótesis de inducción. Luego, bastaría probar que $-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} \leq 0$ y tendríamos el resultado. En efecto, como $2n + 3 > 2n + 2 \Rightarrow \frac{1}{2n+2} > \frac{1}{2n+3}$ y entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} &\leq 2\frac{1}{2n+2} \\ &= \frac{1}{n+1} \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} \leq 0\end{aligned}$$

Luego concluimos lo pedido.

P2 **Caso Base** Para $n = 1$ se tiene que el lado izquierdo es igual a $2 \times 7 + 3 \times 5 - 5 = 14 + 15 - 5 = 24$, que es divisible por 24.

Paso inductivo Supongamos que se tiene para n. Entonces,

$$\begin{aligned}2 \times 7^{n+1} + 3 \times 5^{n+1} - 5 &= 2 \times 7 \times 7^n + 3 \times 5 \times 5^n - 5 \\ &= 14 \times 7^n + 15 \times 5^n - 5 \\ &= 12 \times 7^n + 12 \times 5^n + 2 \times 7^n + 3 \times 5^n - 5 \\ &= 12(7^n + 5^n) + (2 \times 7^n + 3 \times 5^n - 5)\end{aligned}$$

El primer parentesis es par, pues es suma de numeros impares (la potencia de un numero impar (con exponente no negativo) es impar, pobar por induccion si se quiere); asi que el primer termino es divisible por 24, y el segundo es divisible por 24 por la hipotesis de induccion.

P3 El caso base es para $n = 10$, donde tenemos $n^3 = 1000 < 2^{10} = 1024$, luego basta con probar la inducción. Supongamos $n^3 < 2^n$ y veamos que $(n + 1)^3 < 2^{n+1}$.
En efecto, en primer lugar observamos que, por desarrollo del cubo de binomio, $(n + 1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$, donde el término n^3 lo tenemos acotado por 2^n gracias a la hipoótesis de inducción. Veamos qué pasa con los demás términos.

Afirmamos que se tiene, para $n \geq 10$, $1 < 3n < 3n^2 < \frac{2^n}{3}$. Veamos que es cierto: las primeras dos desigualdades son triviales, y luego basta con ver que, como $n \geq 10$ entonces $9 < n$, y luego $9n^2 < n^3$, con lo que $3n^2 < \frac{n^3}{3}$. Con todo esto

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 < 2^3 + \frac{2^3}{3} + \frac{2^3}{3} + \frac{2^3}{3}$$

Donde usamos la hipótesis de inducción de inducción y lo que probamos recién. Finalmente, como $2^3 + \frac{2^3}{3} + \frac{2^3}{3} + \frac{2^3}{3} = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$, concluimos la propiedad para todo $n \geq 10$

P4 **Caso Base** Para $n = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 3(1+1)+1 = 7$, $a_4 = 3(7+1)+1 = 25$, $a_5 = 3(25+7)+1 = 97$, por lo que $a_{3+2} - 1 = a_5 - 1 = 97 - 1 = 96$ es par.

Paso Inductivo Supongamos se tiene para n. Entonces,

$$\begin{aligned}
a_{3(n+1)+2} &= a_{3n+5} \\
&= 3(a_{3n+4} + a_{3n+3}) + 1 \\
&= 3a_{3n+4} + 3a_{3n+3} + 1 \\
&= 3[3(a_{3n+3} + a_{3n+2}) + 1] + 3a_{3n+3} + 1 \\
&= 9a_{3n+3} + 9a_{3n+2} + 3 + 3a_{3n+3} + 1 \\
&= 12a_{3n+3} + 9a_{3n+2} + 4 \\
a_{3(n+1)+2} - 1 &= 12a_{3n+3} + 9a_{3n+2} + 3 \\
&= 12a_{3n+3} + 3(3a_{3n+2} - 1) + 6
\end{aligned}$$

Notemos que el primer termino es par, el segundo, por hipotesis de induccion tambien lo es, y 6 tambien lo es. Por lo tanto, se tiene.

Caso Base Para $n = 1$, $a_4 = 25$, por lo que $3a_{3+1} + 5 = 3a_4 + 5 = 3 \times 25 + 5 = 80$ es divisible por 8.

Paso Inductivo Supongamos se tiene para n. Entonces,

$$\begin{aligned}
3a_{3(n+1)+1} &= 3a_{3n+4} \\
&= 3[3(a_{3n+3} + a_{3n+2}) + 1] \\
&= 9a_{3n+3} + 9a_{3n+2} + 3 \\
&= 9[3(a_{3n+2} + a_{3n+1}) + 1] + 9a_{3n+2} + 3 \\
&= 27a_{3n+2} + 27a_{3n+1} + 9 + 9a_{3n+2} + 3 \\
&= 36a_{3n+2} + 27a_{3n+1} + 12 \\
3a_{3(n+1)+1} + 5 &= 36a_{3n+2} + 27a_{3n+1} + 12 + 5 \\
&= 36(a_{3n+2} - 1) + 9(3a_{3n+1} + 5) + 8
\end{aligned}$$

Notemos que el primer termino es divisible por 8, porque por la parte (a) ya se vio que $a_{3n+2} - 1$ es par; el segundo, por hipotesis de induccion tambien lo es, y 8 tambien lo es. Por lo tanto, se tiene.

Caso Base Para $n = 1$, $a_3 + a_4 = 7 + 25 = 32$, que es divisible por 32.

Paso Inductivo Supongamos se tiene para n. Entonces, usando los calculos anteriormente hechos,

$$\begin{aligned}
a_{3(n+1)} + a_{3(n+1)+1} &= a_{3n+3} + a_{3n+4} \\
&= [3a_{3n+2} + 3a_{3n+1} + 1] + [12a_{3n+2} + 9a_{3n+1} + 4] \\
&= 15a_{3n+2} + 12a_{3n+1} + 5 \\
&= 15(3a_{3n+1} + 3a_{3n} + 1) + 12a_{3n+1} + 5 \\
&= 45(a_{3n+1} + a_{3n}) + 12a_{3n+1} + 5 + 15 \\
&= 45(a_{3n+1} + a_{3n}) + 4(3a_{3n+1} + 5) - 20 + 20 \\
&= 45(a_{3n+1} + a_{3n}) + 4(3a_{3n+1} + 5)
\end{aligned}$$

Notemos que el primer termino es divisible por 32 por hipotesis de induccion, y el segundo es divisible por 32 por la parte (b).

P5 **(a)** El caso base es para $k = 0$, con lo que bastaría probar que $H_1 \leq 1$, pero $H_1 = \sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i} = 1$, y luego el caso base se tiene.

Veamos el paso inductivo: supongamos $H_{2^k} \leq 1 + k$ y notemos que

$$H_{2^{k+1}} = \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} + \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i}$$

Donde por hipótesis de inducción la primera sumatoria del término de la derecha está acotada por $1+k$, y luego bastaría ver que la segunda sumatoria está acotada superiormente por 1. En efecto, como en la segunda sumatoria el mayor de los sumandos es el primero (a medida que aumenta i la expresión $\frac{1}{i}$ se hace más pequeña), podemos acotar la segunda sumatoria como si todos los sumandos fueran iguales al primero, esto es

$$\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \leq \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{2^k+1}$$

Entonces podemos factorizar el término dentro de la sumatoria, ya que no depende de i, luego queda

$$= \frac{1}{2^k+1} \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} 1 = \frac{1}{2^k+1}(2^{k+1} - (2^k+1) + 1)$$

$$= \frac{2^k}{2^k+1} \leq 1$$

De donde se concluye lo pedido al sumar todo.

(b) Arriba vimos que $H_1 = 1$, luego para probar el caso base basta con notar que $1 = H_1 = (1+1)\cdot 1 - 1$. Veamos el paso inductivo:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} H_k &= \sum_{k=1}^{n} H_k + H_{n+1} \\
&= (n+1)H_n - n + H_{n+1}
\end{aligned}$$

Por otro lado notemos que $H_{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1}$, lo que nos dice que $H_{n+1} - \frac{1}{n+1} = H_n$ y por lo tanto $(n+1)H_n = (n+1)H_{n+1} - 1$, con lo que reemplazamos arriba para obtener que todo es igual a

$$(n+1)H_{n+1} - 1 - n + H_{n+1}$$

Lo que a su vez es igual a $(n+2)H_{n+1} - (n+1)$. Con esto se concluye lo pedido.

P6 **Caso Base** Para $n = 1$, el lado izquierdo es $1 + x^{2^{1-1}} = 1 + x^{2^0} = 1 + x$, y el lado derecho es (para $x \neq 1$)

$$\frac{x^{2^1} - 1}{x - 1} = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = x + 1$$

Asi se tiene la igualdad.

Paso inductivo Sea $f_n = (1 + x) \dots (1 + x^{2^{n-1}})$, entonces

$$\begin{aligned}
f_{n+1} &= (1 + x^{2^n}) f_n \\
&= (1 + x^{2^n}) \frac{x^{2^n} - 1}{x - 1} \\
&= \frac{(x^{2^n} + 1)(x^{2^n} - 1)}{x - 1} \\
&= \frac{(x^{2^n})^2 - 1}{x - 1} \\
&= \frac{x^{2 \times 2^n} - 1}{x - 1} \\
&= \frac{x^{2^{n+1}} - 1}{x - 1}
\end{aligned}$$

El paso de la primera linea a la segunda es por la hipotesis inductiva.

$\square$