7. Semana 6

P1

- Caso base ($n=1$): $\sum_{k=1}^{2} \frac{1}{1+k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \leq \frac{5}{6}$.
- Hipótesis inductiva: Supongamos que $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k} \leq \frac{5}{6}$, para cierto $n \geq 1$. Ahora debemos demostrar que esto es cierto para $n+1$, en efecto
- PDQ $\sum_{k=1}^{n+2} \frac{1}{n+1+k} \leq \frac{5}{6}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+2} \frac{1}{n+1+k} &= \sum_{k=2}^{n+3} \frac{1}{n+k} && \text{\textbackslash cambio de índice} \\
&= \sum_{k=2}^{n+3} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} && \text{\textbackslash sumar 0} \\
&= \sum_{k=1}^{n+3} \frac{1}{n+k} - \frac{1}{n+1} && \text{\textbackslash incorporar el término } \frac{1}{n+1} \text{ en la sumatoria} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n+3} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} && \text{\textbackslash soltar últimos 2 términos} \\
&\leq \frac{5}{6} + \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+2} && \text{\textbackslash hipótesis inductiva} \\
&= \frac{5}{6} - \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} \\
&\leq \frac{5}{6} && \backslash -\frac{1}{(2n+2)(2n+3)} \text{ es siempre menor que 0}
\end{aligned}$$

P2

- Caso base ($n=1$): $2 \cdot 7 + 3 \cdot 5 - 5 = 24$ claramente divisible por 24.
- Hipótesis inductiva: Supongamos que $2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5 = 24k$, para cierto $n \geq 1$ con $k \in \mathbb{Z}$. Ahora debemos demostrar que esto es cierto para $n+1$, en efecto
- PDQ $2 \cdot 7^{n+1} + 3 \cdot 5^{n+1} - 5 = 24j$, con $j \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
2 \cdot 7^{n+1} + 3 \cdot 5^{n+1} - 5 &= 14 \cdot 7^n + 15 \cdot 5^n - 5 \\
&= 2 \cdot 7^n + 3 \cdot 5^n - 5 + 12 \cdot 7^n + 12 \cdot 5^n \\
&= 24k + 12(7^n + 5^n) && \text{\textbackslash hipótesis inductiva} \\
&= 24k + 12(2l) && \backslash 7^n + 5^n \text{es siempre par (suma de 2 impares)} \\
&= 24(k+l) \\
&= 24j && \backslash \text{con } j \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Para convencerse vamos a demostrar que $7^n + 5^n$ es par o lo que es lo mismo, demostrar que es divisible por 2, se hará mediante inducción.

- Caso base ($n = 1$): $7^1 + 5^1 = 12$ claramente divisible por 2.
- Hipótesis inductiva: Supongamos que $7^n + 5^n = 2k$, para cierto $n \geq 1$ con $k \in \mathbb{Z}$. Ahora debemos demostrar que esto es cierto para $n+1$, en efecto
- PDQ $7^{n+1} + 5^{n+1} - 5 = 2j$, con $j \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
7^{n+1} + 5^{n+1} &= 7 \cdot 7^n + 5 \cdot 5^n \\
&= 6 \cdot 7^n + 7^n + 4 \cdot 5^n + 5^n \\
&= 6 \cdot 7^n + 4 \cdot 5^n + 7^n + 5^n \\
&= 6 \cdot 7^n + 4 \cdot 5^n + 2k \qquad \backslash\text{hipótesis inductiva} \\
&= 2(3 \cdot 7^n + 2 \cdot 5^n) + 2k \\
&= 2(3 \cdot 7^n + 2 \cdot 5^n + k) \\
&= 2j \qquad \backslash\text{con } j \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

P3

- Caso base ($n = 10$): $10^3 = 1000 < 2^{10} = 1024$.
- Hipótesis inductiva: Supongamos que $n^3 \leq 2^n$, para cierto $n \geq 10$. Ahora debemos demostrar que esto es cierto para $n+1$, en efecto
- PDQ $(n+1)^3 < 2^{n+1}$,

$$\begin{aligned}
(n+1)^3 &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\
&< n^3 + 3n^2 + 3n^2 + 1 \quad \backslash\text{como } 1 < 3n \text{ multiplicando por } n \text{ se tiene } 3n < 3n^2 \\
&< n^3 + 3n^2 + 3n^2 + 3n^2 \quad \backslash\text{como } 1 < \sqrt{3}n \text{ elevando a 2 se tiene que } 1 < 3n^2 \\
&< n^3 + 9n^2 \\
&< n^3 + n^3 \qquad \backslash\text{como } 9 < n \text{ multiplicando por } n^2 \text{ se tiene } 9n^2 < n^3 \\
&< 2^n + 2^n = 2^{n+1} \qquad \backslash\text{hipótesis inductiva}
\end{aligned}$$

Es posible realizar el problema de otra manera, menos directa, pero igualmente válida, que es hacer inducción sobre inducción, es decir, si en el momento que realizan el paso inductivo llegan a una desigualdad que no es directa, pero les ayuda a resolver el problema, la demuestran con inducción, pueden aplicar inducción sobre inducción cuantas veces quieran.

P4 Primero calculamos $a(3) = 3[a(2) + a(1)] + 1 = 7$ y $a(4) = 3[a(3) + a(2)] + 1 = 25$.

(a)

- Caso base ($n = 1$): $a(3 \cdot 1 + 2) - 1 = a(5) - 1 = 3[a(4) + a(3)] = 3[3[a(3) + a(2)] + 1 + a(3)] = 96$ claramente divisible por 2.
- Hipótesis inductiva: Supongamos que $a(3n + 2) - 1 = 2k$, para cierto $n \geq 1$, con $k \in \mathbb{Z}$. Ahora debemos demostrar que esto es cierto para $n + 1$, en efecto

- PDQ $a(3(n+1)+2)-1=2j$, con $j\in\mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
a(3(n+1)+2)-1 &= a(3n+5)-1\\
&= 3[a(3n+4)+a(3n+3)]\\
&= 3[3[a(3n+3)+a(3n+2)]-1+a(3n+3)]\\
&= 3[4a(3n+3)+2a(3n+2)+a(3n+2)-1]\\
&= 3[4a(3n+3)+2a(3n+2)+2k] \qquad \backslash\text{hipótesis inductiva}\\
&= 2(3[2a(3n+3)+a(3n+2)+k])\\
&= 2j \qquad \backslash\text{con } j\in\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

(b)
- Caso base ($n=1$): $3a(3\cdot 1+1)+5=3a(4)+5=80$ claramente divisible por 8.
- Hipótesis inductiva: Supongamos que $3a(3n+1)+5=8k$, para cierto $n\geq 1$, con $k\in\mathbb{Z}$. Ahora debemos demostrar que esto es cierto para $n+1$, en efecto
- PDQ $3a(3(n+1)+1)+5=8j$, con $j\in\mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
3a(3(n+1)+1)+5 &= 3a(3n+4)+5\\
&= 3[3a(3n+3)+3a(3n+2)+1]+5\\
&= 9[a(3n+3)+a(3n+2)]+8\\
&= 9[3[a(3n+2)+a(3n+1)]+1+a(3n+2)]+8\\
&= 36a(3n+2)+27a(3n+1)+17\\
&= 36[a(3n+2)-1]+36+9[3a(3n+1)+5]-45+17\\
&= 36(2i)+36+9[3a(3n+1)+5]-45+17 \quad \backslash\text{parte (a)}\\
&= 36(2i)+9(8k)+8 \qquad \backslash\text{hipótesis inductiva}\\
&= 8(9i+9k+1)\\
&= 8j \qquad \backslash\text{con } j\in\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

(c)
- Caso base ($n=1$): $a(3\cdot 1)+a(3\cdot 1+1)=a(3)+a(4)=32$ claramente divisible por 32.
- Hipótesis inductiva: Supongamos que $a(3n)+a(3n+1)=32k$, para cierto $n\geq 1$, con $k\in\mathbb{Z}$. Ahora debemos demostrar que esto es cierto para $n+1$, en efecto

- PDQ $a(3(n+1)) + a(3(n+1)+1) = 32j$, con $j \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
a(3(n+1)) + a(3(n+1)+1) &= a(3n+3) + a(3n+4) \\
&= a(3n+3) + 3a(3n+3) + 3a(3n+2) + 1 \\
&= 4(3a(3n+2) + 3a(3n+1) + 1) + 3a(3n+2) + 1 \\
&= 15a(3n+2) + 12a(3n+1) + 5 \\
&= 15(3[a(3n+1) + a(3n)] + 1) + 12a(3n+1) + 5 \\
&= 45(32k) + 15 + 12a(3n+1) + 5 \qquad \backslash \text{H.I} \\
&= 45(32k) + 15 + 4(3a(3n+1) + 5) - 20 + 5 \\
&= 45(32k) + 32i \quad \backslash \text{parte (b)} \\
&= 32(45k + i) \\
&= 32j \qquad \backslash \text{con } j \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

P5 **(a)**

- Caso base ($k = 1$): $H_{2^1} = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} \leq 1 + 1$.
- Hipótesis inductiva: Supongamos que $H_{2^k} = \sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} \leq 1 + k$, para cierto $k \geq 1$. Ahora debemos demostrar que esto es cierto para $n+1$, en efecto
- PDQ $H_{2^{k+1}} = \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \leq 1 + k + 1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} &= \sum_{i=1}^{2\cdot 2^k} \frac{1}{i} \\
&= \sum_{i=1}^{2^k+2^k} \frac{1}{i} \\
&= \sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} + \sum_{i=1+2^k}^{2^k+2^k} \frac{1}{i} \qquad \backslash \text{separar suma en 2} \\
&= \sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} + \sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i+2^k} \qquad \backslash \text{cambio de índice} \\
&\leq 1 + k + \sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i+2^k} \qquad \backslash \text{hipótesis inductiva}
\end{aligned}$$

Fijarse que

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i+2^k} = \frac{1}{1+2^k} + \frac{1}{2+2^k} + ... + \frac{1}{2^k+2^k}$$

Pero

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1+2^k} &\leq \frac{1}{1+2^k} \\
\frac{1}{2+2^k} &\leq \frac{1}{1+2^k} && \text{\textbackslash hacer multiplicación cruzada para verlo} \\
&\vdots \\
\frac{1}{2^k+2^k} &\leq \frac{1}{1+2^k}
\end{aligned}
$$

Sumando todo queda:

$$
\frac{1}{1+2^k}+\frac{1}{2+2^k}+...+\frac{1}{2^k+2^k} \leq \underbrace{\frac{1}{1+2^k}+\frac{1}{1+2^k}+...+\frac{1}{1+2^k}}_{2^k \text{ veces}}
$$

$$
\sum_{i=1}^{2^k}\frac{1}{i+2^k} \leq \frac{2^k}{2^k+1} \leq 1 \text{ \textbackslash multiplicación cruzada para verlo}
$$

Retornando a la desigualdad anterior

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2^{k+1}}\frac{1}{i} &\leq 1+k++\sum_{i=1}^{2^k}\frac{1}{i+2^k} \\
&\leq 1+k+1
\end{aligned}
$$

(b)
- Caso base ($n=1$): $\sum_{i=1}^{1} H_i = H_1$, pero $H_1 = \sum_{i=1}^{1}\frac{1}{i} = 1$, luego $H_1 = (1+1)H_1 - 1 = (1+1)-1 = 1$.
- Hipótesis inductiva: Supongamos que $\sum_{i=1}^{n} H_i = (n+1)H_n - n$, para cierto $n \geq 1$. Ahora debemos demostrar que esto es cierto para $n+1$, en efecto

- PDQ $\sum_{i=1}^{n+1} H_i = (n+1+1)H_{n+1} - (n+1)$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} H_i &= \sum_{i=1}^{n} H_i + H_{n+1} \\
&= (n+1)H_n - n + H_{n+1} && \backslash\text{hipótesis inductiva} \\
&= (n+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} - n + H_{n+1} && \backslash\text{definición de } H_n \\
&= (n+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} + 1 - 1 - n + H_{n+1} && \backslash\text{sumar } 0 \\
&= (n+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} + \frac{n+1}{n+1} - 1 - n + H_{n+1} && \backslash 1 = \frac{n+1}{n+1} \\
&= (n+1)\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} + \frac{1}{n+1}\right] - 1 - n + H_{n+1} \\
&= (n+1)\sum_{i=1}^{n+1}\frac{1}{i} - 1 - n + H_{n+1} && \backslash\text{incorporar } \frac{1}{n+1} \text{ a la sumatoria} \\
&= (n+1)H_{n+1} - 1 - n + H_{n+1} \\
&= (n+2)H_{n+1} - (n+1)
\end{aligned}$$

P6

- Caso base ($n=1$): $(1+x) = \frac{x^{2^1}-1}{x-1} = \frac{(1+x)(x-1)}{x-1} = (x+1)$.
- Hipótesis inductiva: Supongamos que $(1+x)(1+x^2)(1+x^{2^2})(1+x^{2^3})...(1+x^{2^{n-1}}) = \frac{x^{2^n}-1}{x-1}$, para cierto $n \geq 1$. Ahora debemos demostrar que esto es cierto para $n+1$, en efecto
- PDQ $(1+x)(1+x^2)(1+x^{2^2})(1+x^{2^3})...(1+x^{2^{n-1}})(1+x^{2^n}) = \frac{x^{2^{n+1}}-1}{x-1}$.

$$\begin{aligned}
(1+x)(1+x^2)(1+x^{2^2})(1+x^{2^3})...(1+x^{2^{n-1}})(1+x^{2^n}) &= \frac{x^{2^n}-1}{x-1}(1+x^{2^n}) && \backslash\text{H.I.} \\
&= \frac{x^{2^n} + x^{2^n+2^n} - 1 - x^{2^n}}{x-1} \\
&= \frac{x^{2\cdot 2^n} - 1}{x-1} \\
&= \frac{x^{2^{n+1}} - 1}{x-1}
\end{aligned}$$