



6. Semana 5

P1 (a) La relación es de orden si es refleja, antisimétrica y transitiva

- Refleja: Sea $p \in \mathcal{P}$ se sabe que $(p \Leftrightarrow (p \wedge p)) \Leftrightarrow p\mathcal{R}p$.
- Antisimétrica: Sean $p, q \in \mathcal{P}$ Como $p\mathcal{R}q \Leftrightarrow ((p \wedge q) \Leftrightarrow q)$, además $q\mathcal{R}p \Leftrightarrow ((q \wedge p) \Leftrightarrow p)$, juntando ambas expresiones se tiene que $p \Leftrightarrow (q \wedge p) \Leftrightarrow q$, luego $p \Leftrightarrow q$ y por definición $p = q$.
- Transitiva: Sean $p, q, r \in \mathcal{P}$ tales que $p\mathcal{R}q$ y $q\mathcal{R}r$, se tiene que $(q \wedge r) \Leftrightarrow r$, pero como $q \Leftrightarrow (p \wedge q)$, significa que $((p \wedge q) \wedge r) \Leftrightarrow r$, lo que lleva a $(p \wedge r) \Leftrightarrow r \Leftrightarrow p\mathcal{R}r$.

Luego la relación es de orden.

(b) Si es de orden total se debe cumplir que $p\mathcal{R}q \vee q\mathcal{R}p$

$$\begin{aligned}
 & p\mathcal{R}q \vee q\mathcal{R}p \\
 \Leftrightarrow & [(p \wedge q) \Leftrightarrow q] \vee [(q \wedge p) \Leftrightarrow p] \\
 \Leftrightarrow & [((p \wedge q) \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow (p \wedge q))] \vee [((q \wedge p) \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow (q \wedge p))] \\
 \Leftrightarrow & [q \Rightarrow (p \wedge q)] \vee [p \Rightarrow (q \wedge p)] \\
 \Leftrightarrow & \bar{q} \vee (p \wedge q) \vee \bar{p} \vee (q \wedge p) \\
 \Leftrightarrow & \bar{q} \vee \bar{p} \vee (p \wedge q) \\
 \Leftrightarrow & \overline{(q \wedge p)} \vee (p \wedge q) \\
 \Leftrightarrow & V
 \end{aligned}$$

P2 (a) La relación es de equivalencia si es refleja, simétrica y transitiva

- Refleja: Sea $(a_1, a_2) \in A$, tomando $k = 0$, es lo mismo que $2 \cdot 0 = a_1 + a_2 - a_1 - a_2 \Leftrightarrow (a_1, a_2)\mathcal{R}(a_1, a_2)$.
- Simétrica: Sean $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in A$, como $(a_1, a_2)\mathcal{R}(b_1, b_2) \Leftrightarrow a_1 + a_2 - b_1 - b_2 = 2k$ con $k \in \mathbb{Z}$, reordenando la expresión: $a_1 + a_2 - b_1 - b_2 = 2k \Leftrightarrow -(b_1 + b_2 - a_1 - a_2) = 2k \Leftrightarrow b_1 + b_2 - a_1 - a_2 = 2(-k)$, llamando $k' = -k$, que claramente es entero, tenemos que $b_1 + b_2 - a_1 - a_2 = 2k' \Leftrightarrow (b_1, b_2)\mathcal{R}(a_1, a_2)$.
- Transitiva: Sean $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2) \in A$ como $(a_1, a_2)\mathcal{R}(b_1, b_2) \Leftrightarrow a_1 + a_2 - b_1 - b_2 = 2k$ y $(b_1, b_2)\mathcal{R}(c_1, c_2) \Leftrightarrow b_1 + b_2 - c_1 - c_2 = 2j$ con $k, j \in \mathbb{Z}$ Sumando ambas expresiones tenemos como resultado $a_1 + a_2 - b_1 - b_2 + b_1 + b_2 - c_1 - c_2 = a_1 + a_2 - c_1 - c_2 = 2(k + j)$ llamando $m = k + j$ que claramente es entero porque la suma en \mathbb{Z} es cerrada, se tiene que $a_1 + a_2 - c_1 - c_2 = 2m \Leftrightarrow (a_1, a_2)\mathcal{R}(c_1, c_2)$.

Luego la relación es de equivalencia.

(b)

$$[(0, 0)]_{\mathcal{R}} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid (0, 0)\mathcal{R}(x, y)\} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x + y = -2k\}$$



Este conjunto son los pares ordenados de números tales que la suma de sus componentes es par, esto solamente se puede dar si tenemos: (par,par) o (impar, impar), (números de igual paridad).

$$[(1,0)]_{\mathcal{R}} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid (1,0)\mathcal{R}(x,y)\} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x+y = -2k+1\}$$

Este conjunto son los pares ordenados de números tales que la suma de sus componentes es impar, esto solamente se puede dar si tenemos: (par,impar) o (impar, par), (números de distinta paridad).

- (c) Es claro que $[(0,0)]_{\mathcal{R}} \cup [(1,0)]_{\mathcal{R}} \subseteq A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (los pares ordenados fueron sacados de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$), falta demostrar la otra inclusión: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \subseteq [(0,0)]_{\mathcal{R}} \cup [(1,0)]_{\mathcal{R}}$ En efecto, sea $(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, dicho par ordenado puede tener algunas de estas 4 combinaciones posibles:

- (par,par), en este caso pertenece a $[(0,0)]_{\mathcal{R}}$
- (impar,impar), en este caso pertenece a $[(0,0)]_{\mathcal{R}}$
- (impar,par), en este caso pertenece a $[(1,0)]_{\mathcal{R}}$
- (par,impar), en este caso pertenece a $[(1,0)]_{\mathcal{R}}$

Luego con esto se ha probado la inclusión que faltaba, se concluye que $[(0,0)]_{\mathcal{R}} \cup [(1,0)]_{\mathcal{R}} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

- (d) Lo que se pide encontrar acá es una función tal que lleve los números (x,y) de distinta paridad a tener la misma paridad, entendiendo esto, bastaría una función $f : [(1,0)]_{\mathcal{R}} \rightarrow [(0,0)]_{\mathcal{R}}$ tal que $(x,y) \rightarrow f(x,y) = (x+1,y)$, por ejemplo, si tomamos el par $(3,8)$ que está en $[(1,0)]_{\mathcal{R}}$, al aplicarle la función quedaría $(3+1,8) = (4,8)$ que ahora pertenece a $[(0,0)]_{\mathcal{R}}$, esta función es biyectiva, es de 2 variables, pero la pueden ver como dos funciones por separado $f_1(x) = x+1$ y $f_2(y) = y$ esto es debido a que las componentes de los pares ordenados son independientes entre sí, claramente f_1 y f_2 son biyectivas, luego f es biyectiva.

P3 La relación es de orden si es refleja, antisimétrica y transitiva

- Refleja: Claramente $(\forall x,y \in \mathbb{R})(xR_1y \Rightarrow xR_1y) \Leftrightarrow R_1 \Omega R_1$.
- Antisimétrica: Sean $R_1, R_2 \in A$

$$\begin{aligned} & R_1 \Omega R_2 \wedge R_2 \Omega R_1 \\ \Leftrightarrow & (\forall x,y \in \mathbb{R})(xR_1y \Rightarrow xR_2y) \wedge (\forall x,y \in \mathbb{R})(xR_2y \Rightarrow xR_1y) \\ \Leftrightarrow & (\forall x,y \in \mathbb{R})[(xR_1y \Rightarrow xR_2y) \wedge (xR_2y \Rightarrow xR_1y)] \\ \Leftrightarrow & (\forall x,y \in \mathbb{R})[(xR_1y \Leftrightarrow xR_2y)] \\ \Leftrightarrow & R_1 = R_2 \end{aligned}$$



- Transitiva: Sean $R_1, R_2, R_3 \in A$

$$\begin{aligned} & R_1 \Omega R_2 \wedge R_2 \Omega R_3 \\ \Leftrightarrow & (\forall x, y \in \mathbb{R})(xR_1y \Rightarrow xR_2y) \wedge (\forall x, y \in \mathbb{R})(xR_2y \Rightarrow xR_3y) \\ \Leftrightarrow & (\forall x, y \in \mathbb{R})[(xR_1y \Rightarrow xR_2y) \wedge (xR_2y \Rightarrow xR_3y)] \\ \Rightarrow & (\forall x, y \in \mathbb{R})[(xR_1y \Rightarrow xR_3y) \quad \setminus \text{transitividad en proposiciones} \\ \Leftrightarrow & R_1 \Omega R_3 \end{aligned}$$

Luego la relación es de orden, para ver si es parcial, entonces hay que encontrar 2 relaciones $R_1, R_2 \in A$ tales que $R_1 \not\Omega R_2 \wedge R_2 \not\Omega R_1$, pensemos por ejemplo xR_1y : si x e y dividen a 6 y xR_2y : si 6 divide a x e y , podemos ver entonces que $R_1 \not\Omega R_2$, basta tomar $x = 2$ e $y = 3$, y también $R_2 \not\Omega R_1$, basta tomar $x = 18$ e $y = 24$, luego la relación es de orden parcial.

P4 (a) La relación es de equivalencia si es refleja, simétrica y transitiva

- Refleja: Sea $x \in Q_+$, tomando $\alpha = 0$ se tiene que $p^\alpha = 1 = \frac{x}{x} \Leftrightarrow x \Omega_p x$.
- Simétrica: Sean $x, y \in Q_+$ como $x \Omega_p y \Leftrightarrow \frac{x}{y} = p^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{Z}$ reordenando se tiene $\frac{y}{x} = p^{-\alpha}$, luego eligiendo $\beta = -\alpha$ que claramente pertenece a \mathbb{Z} , se tiene que $\frac{y}{x} = p^\beta \Leftrightarrow y \Omega_p x$.
- Transitiva: Sean $x, y, z \in Q_+$ como $x \Omega_p y \Leftrightarrow \frac{x}{y} = p^\alpha$ e $y \Omega_p z \Leftrightarrow \frac{y}{z} = p^\beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, multiplicando ambas expresiones se tiene que $\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} = p^{(\alpha+\beta)}$, eligiendo $\gamma = \alpha + \beta$ que claramente pertenece a \mathbb{Z} porque la suma en \mathbb{Z} es cerrada, se tiene que $\frac{x}{z} = p^\gamma \Leftrightarrow x \Omega_p z$.

Luego la relación es de equivalencia.

(b)

$$[1]_{\Omega_2} = \{x \in Q_+ \mid 1 \Omega_2 x\} = \{x \in Q_+ \mid x = 2^{-\alpha}\} = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, 2, 4, 8, \dots\right\}$$

P5 Nota: Existe un pequeño error de tipeo, en donde dice $f(k)(x) = y$ debe decir $f^{(k)}(x) = y$ que indica composición de funciones.

(a) La relación es de equivalencia si es refleja, simétrica y transitiva

- Refleja: Sea $x \in A$, dada la propiedad de f si se toma $k = n$ se tiene que $f^{(n)}(x) = x \Leftrightarrow xRx$.
- Simétrica: Sean $x, y \in A$, como xRy existe un k_1 tal que $f^{(k_1)}(x) = y$, luego componiendo la función $n - k_1$ veces se tiene que $f^{(n-k_1+k_1)}(x) = x = f^{(n-k_1)}(y) \Leftrightarrow yRx$.
- Transitiva: Sean $x, y, z \in A$, como xRy existe un k_1 tal que $f^{(k_1)}(x) = y$, y también como yRz existe un k_2 tal que $f^{(k_2)}(y) = z$, si $f^{(k_1)}(x) = y$ se compone k_2 veces se obtiene $f^{(k_1+k_2)}(x) = f^{(k_2)}(y) = z \Leftrightarrow xRz$ existe la posibilidad que $2n > k_1 + k_2 > n$ en ese caso en vez de tomar $k_1 + k_2$ se toma $k_1 + k_2 - n$, en donde claramente $k_1 + k_2 - n < n$ y además $f^{(k_1+k_2)}(x) = f^{(n)} \circ f^{(k_1+k_2-n)}(x) = f^{(k_1+k_2-n)}(x) = z$.



Luego la relación es de equivalencia.

(b) **b.1** Para $n = 3$ se tiene $f^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = f^{(2)}(x_2, x_3, x_1) = f(x_3, x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_3)$

b.2 $[(0, 0, 0)]_A = \{(x, y, z) \in \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\} \mid (0, 0, 0)R(x, y, z)\} = \{(0, 0, 0)\}$
 $[(1, 1, 1)]_A = \{(x, y, z) \in A \mid (1, 1, 1)R(x, y, z)\} = \{(1, 1, 1)\}$
 $[(1, 0, 0)]_A = \{(x, y, z) \in A \mid (1, 0, 0)R(x, y, z)\} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$
 $[(1, 1, 0)]_A = \{(x, y, z) \in A \mid (1, 1, 0)R(x, y, z)\} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$

P6 (a) La relación es de equivalencia si es refleja, simétrica y transitiva

- Refleja: Sea $X \in P(E)$, claramente $A \cap X = A \cap X \Leftrightarrow X\mathcal{R}X$.
- Simétrica: Sean $X, Y \in P(E)$, como $X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow A \cap X = A \cap Y \Leftrightarrow A \cap Y = A \cap X \Leftrightarrow Y\mathcal{R}X$.
- Transitiva: Sean $X, Y, Z \in P(E)$, como $X\mathcal{R}Y$ y $Y\mathcal{R}Z$ se tiene que $A \cap X = A \cap Y = A \cap Z \Rightarrow A \cap X = A \cap Z \Leftrightarrow X\mathcal{R}Z$.

Luego la relación es de equivalencia.

(b) Primero demostraremos que $\{[X]/X \in P(A)\} \subseteq P(E)/\mathcal{R}$, es claro que $A \subseteq E$ luego $P(A) \subseteq P(E)$ y con esto $\{[X]/X \in P(A)\} \subseteq P(E)/\mathcal{R}$, para la otra inclusión tomamos un $C \in P(E)/\mathcal{R}$ esto quiere decir que $C = [M]$ con $M \in P(E)$, si tomamos un conjunto $X = A \cap M$, se puede ver que $X\mathcal{R}M$, en efecto

$$\begin{aligned} X &= A \cap M && \setminus \text{intersectando con } A \\ A \cap X &= A \cap A \cap M \\ A \cap X &= A \cap M \\ &\Leftrightarrow X\mathcal{R}M \end{aligned}$$

Pero como $X \subseteq A$ ($A \cap M \subseteq A$), quiere decir que $X \in P(A)$, además dado $X\mathcal{R}M$ significa que $C = [M] = [X]$ con $C \in \{[X]/X \in P(A)\}$.

(c) Por contrarecíproca, como $[X] = [Y]$ esto quiere decir que $X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow A \cap X = A \cap Y$, pero además $X, Y \in P(A)$, luego $X \subseteq A$ e $Y \subseteq A$, lo que significa que $X = A \cap X$ y que $Y = A \cap Y$, juntando ambas ecuaciones resulta que $X = Y$.