MA1101-5 Introducción al Álgebra
Profesor: Maya Stein
Auxiliar: Juan Pedro Ross
Fecha: Viernes 15 de Abril del 2016

Auxiliar 6: Inducción

Resumen:

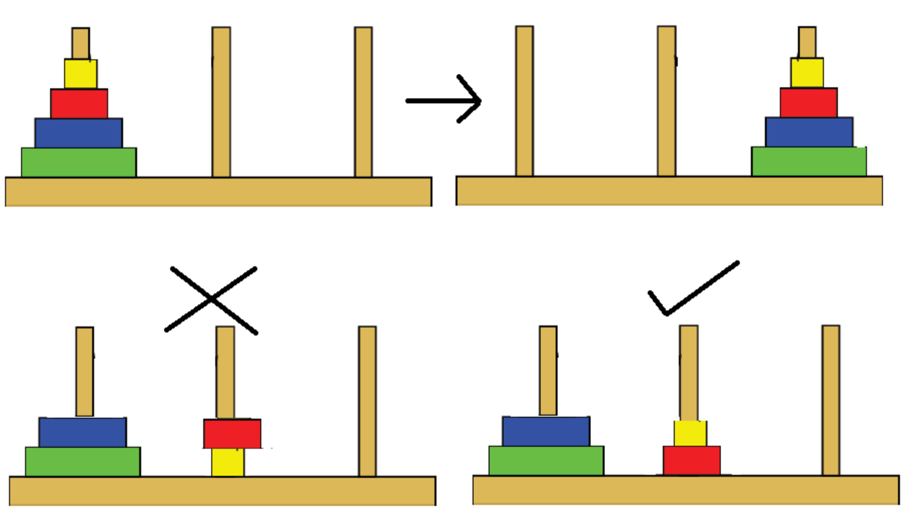
- Inducción **primera forma**

$$[(\forall n \geq n_0)p(n)] \Leftrightarrow [p(n_0) \wedge (\forall n \geq n_0)(p(n) \Rightarrow p(n+1))].$$

- Inducción **segunda forma**

$$[(\forall n \geq n_0)p(n)] \Leftrightarrow [p(n_0) \wedge (\forall n \geq n_0)\{[(\forall k, n_0 \leq k \leq n)p(k)] \Rightarrow p(n+1)\}].$$

P1. Una "torre de Hanoi.^{es} un juego consistente de n anillos de distintos tamaños y tres estacas verticales fijas en un tablero A,B,C, alineadas de izquierda a derecha, en las que se colocan los anillos. Al iniciar el juego todos los anillos están en la estaca A, apilados de mayor a menor, es decir, formando una pila cónica. El juego consiste en trasladar los anillos a la estaca C, para obtener una pila igual a la original. La complicación es que cada vez se puede mover un solo anillo para ubicarlo en otra estaca y si en esta hay otros anillos ellos deben ser de mayor diámetro, es decir, en toda etapa del juego en cada estaca debe haber una pila cónica.



Demostrar que la cantidad de pasos mínimos para ganar el juego está dado por la expresión:

$$p(n) = 2^n - 1$$

P2. Demuestre por inducción que $\forall n \geq 0$ el número $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ es múltiplo de 13.

P3. Recuerde que la sucesión de Fibonacci es una serie de números naturales $F_0, F_1, ..., F_n, F_{n+1}...$ que cumplen que:

$$\begin{aligned} F_0 &= 0 \\ F_1 &= 1 \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2}\ \forall n \geq 2 \end{aligned}$$

Demuestre que:

(I) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1,\ \forall n \geq 1$

(II) $F_n > \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1},\ \forall n \geq 6$

P4. Demuestre por inducción que para todo $n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k (2k+1) = 2n$$

P5. Demuestre que para $x > -1$ FIJO, se tiene que $(1+x)^n \geq 1 + nx\ \forall n \in \mathbb{N}$

P6. *[Propuesto]* Suponga que tiene un n-gono regular (polígono regular de n lados). Demuestre que:

a) La suma de los ángulos interiores es $180(n-2)$

b) La cantidad de diagonales está dada por la expresión: $\frac{n(n+3)}{2}$

Indicación general para la pregunta: A veces los triángulos son buenos aliados