PAUTA "AMIGABLE" CONTROL 2

P1) Recordemos que existen las siguientes propiedades:

$f \circ g$ inyectiva $\Rightarrow$ g inyectiva (*)

$f \circ g$ sobreyectiva $\Rightarrow$ f sobreyectiva (**)

a) 1) P.D.Q f es biyectiva

Entonces tenemos que demostrar que f es inyectiva y sobreyectiva

Sabemos que $g \circ f = Id_A$ y además sabemos que la identidad es siempre biyectiva, y por lo tanto, es (en particular) inyectiva

$\therefore$ $g \circ f$ es inyectiva (porque es $= Id_A$)

$\Rightarrow$ f inyectiva (por (*)).

También sabemos que $f \circ h = Id_B$. Usando el mismo razonamiento tenemos que Id_B es en particular sobreyectiva.

$\therefore$ $f \circ h$ es sobreyectiva (porque es $= Id_B$)

$\Rightarrow$ f sobreyectiva (por (**)).

ya que f es inyectiva y sobreyectiva, podemos concluir que f es biyectiva.

2) Como ya demostramos que f es biyectiva, podemos decir que existe f^{-1} (la inversa de f)

P.D.Q $f^{-1} = g = h$

Sabemos que $g \circ f = Id_A \ / \circ f^{-1}$ (componemos con f^{-1} por la derecha a ambos lados)

$\Rightarrow \ g \circ \underbrace{f \circ f^{-1}} = Id_A \circ f^{-1}$

$\Leftrightarrow \ g \circ Id_B = Id_A \circ f^{-1}$

$\Leftrightarrow \ g = f^{-1}$

* notemos que podemos componer con f^{-1} por la derecha a ambos lados ya que $f^{-1} : B \to A$ y $Id_A : A \to A$ y $f : A \to B$.

("lo que sale de f^{-1} puede entrar a Id_A y a f")

También sabemos que $f \circ h = Id_B \ / \ f^{-1} \circ$ (componemos con f^{-1} por la izquierda a ambos lados)

$\Rightarrow \ \underbrace{f^{-1} \circ f} \circ h = f^{-1} \circ Id_B$

$\Leftrightarrow \ Id_A \circ h = f^{-1} \circ Id_B$

$\Leftrightarrow \ h = f^{-1}$

* notemos que podemos componer con f^{-1} por la izquierda a ambos lados ya que $f^{-1} : B \to A$, $f : A \to B$ y $Id_B : B \to B$.

("lo que sale de f y de Id_B puede entrar a f^{-1}")

$\therefore \ g = f^{-1} = h$

3) P.D.Q $[\forall X \subseteq E,\ \varphi(X) = X] \iff \varphi = Id_E$

=>| Usaremos como hipótesis que $\underbrace{\forall X \subseteq E,\ \varphi(X) = X}$ y demostraremos que $\varphi = Id_E$.

"Para todo conjunto X, subconjunto de E, la imagen de X es X"

Tenemos que $\forall X \subseteq E \quad \varphi(X) = X$

ya que esto se cumple para <u>TODOS</u> los subconjuntos de E, se cumple en particular para $\{x_0\}$ con $x_0 \in E$ (existe al menos alguien en E ya que $E \neq \emptyset$)

es decir $\varphi(\{x_0\}) = \{x_0\}$, con lo que necesariamente $\varphi(x_0) = x_0$.

Podemos hacer lo mismo con todos los elementos del conjunto y así podremos concluir que $\forall x \in E \quad f(x) = x$ ya que $\forall x \in E \quad f(\{x\}) = \{x\}$.

Sabemos además que $\varphi: E \to E$

$$\therefore \quad \begin{aligned} \varphi: E &\to E \\ x &\mapsto f(x) = x \end{aligned} \quad = Id_B$$

$\therefore \ [\forall X \subseteq E.\ \varphi(X) = X] \Rightarrow \varphi = Id_B$

$\therefore \ [\forall X \subseteq E \ \ \varphi(X) = X] \Rightarrow \varphi = Id_E$

<=| Hipótesis: $\varphi = Id_E$, P.D.Q $\forall X \subseteq E \quad \varphi(X) = X$

$\varphi(X) = \{y \in E \mid \exists x \in X \mid f(x) = y\}$ (por definición de conjunto imagen)

Pero como $f(x) = x$ (definición de identidad)

$\varphi(X) = \{x \in E \mid \exists x \in X \ \ f(x) = x\}$

Es decir, "todos los x en E tal que existe algún x en X tal que f(x) = x". Pero para todos los x en E existe algún x en X (si mismo) que cumple eso.

Por lo tanto, todos los x están en la imagen. Además, todos los x están en X, con lo que la imagen queda:

$\varphi(X) = \{x \in X\} = X$ ("La imagen es el conjunto de todos los x en X, es decir, todo X")

$\therefore\ \varphi = Id_E \Rightarrow [\forall X \subseteq E,\ \varphi(X) = X]$

ya que demostramos ambas ~~ambas~~ implicancias, queda demostrado que

$$[\forall X \subseteq E\ \ \varphi(X) = X] \iff [\varphi = Id_E]$$

P2) a) P.D.Q $f \circ g = Id_A$

En efecto: $f \circ g = f(g(x))$

$= f(x, x)$ (porque $g(x) = (x, x)$)

$= x$ (porque $f(x, x) = x$)

$\therefore f \circ g = x$

Además, los elementos que "entran" a $f \circ g$, son los que "entran" a g. Por lo tanto, el conjunto de partida de $f \circ g$ es A (porque $g: A \to A \times A$) los elementos que "salen" de $f \circ g$, son los que "salen" de f. Por lo tanto, el conjunto de llegada de $f \circ g$ también es A (porque $f: A \times A \to A$).

$$\therefore\ \begin{aligned} f \circ g :\ & A \to A \\ & x \mapsto (f \circ g)(x) = x \end{aligned} = Id_A$$

b) Tenemos que ver si f y g son biyectivas.

Partamos por f. Veamos primero si es inyectiva.

¿Existiran dos pares (x,y) (w,z) distintos tal que $f(x,y)=f(w,z)$?

¡Claro que si! Porque A tiene al menos dos elementos.

entonces $\exists y_1, y_2 \in A$ $\quad y_1 \neq y_2$.

si tomamos $f(x,y_1) = x$ y $f(x,y_2)=x$ también.

Pero $(x,y_1) \neq (x,y_2)$.

$\therefore$ f <u>NO</u> es inyectiva.

Veamos ahora si es sobreyectiva. ¿Será posible que para todo x en A exista un par (w,z) tal que $f(w,z)=x$? ¡Por supuesto que sí! ya que $(w,z) \in A \times A$. Entonces demostremos que f es sobreyectiva.

P.D.Q $\forall x \in A \quad \exists (w,z) \in A \times A$ tal que $f(w,z)=x$

Veamos, ¿qué es lo que hace la función f? Toma a la primera componente del par ordenado. Entonces si queremos que $f(w,z)=x$, necesitamos que $w=x$.

Entonces basta tomar $w=x$ (que pertenece a A) y z cualquiera en A y se cumple que $(w,z) \in A \times A$ y $f(w,z)=f(x,z)=x$.

$\therefore$ f es sobreyectiva.

Ya que f no es inyectiva, <u>no</u> puede ser biyectiva.

Veamos que pasa con g

Veamos primero si es inyectiva
¿Será posible que si tomamos x_1, x_2 con $x_1 \neq x_2$, $g(x_1) = g(x_2)$?
es decir, $g(x_1) = (x_1, x_1) = (x_2, x_2) = g(x_2)$
con $(x_1) \neq (x_2)$

$$g(x_1) = g(x_2)$$

$$\Leftrightarrow (x_1, x_1) = (x_2, x_2)$$ (Def de igualdad en pares ordenados)

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge x_1 = x_2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x_1 = x_2}$$

$\therefore$ g es inyectiva.

Veamos ahora la sobreyectividad
¿será posible que para todo $(x, x) \in A \times A$ exista un w en A t.q. $g(w) = (x, x)$?

Si te fijas g obliga a que en la coordenada x y en la coordenada y esté el mismo valor
¡PERO EN A HAY AL MENOS DOS ELEMENTOS! ES DECIR HAY $x_1 \neq y_1$
¿Cuál sería la preimagen de (x_1, y_1)?
NADIE! $\therefore$ g no es sobreyectiva

YA QUE <u>NO</u> ES SOBREYECTIVA, <u>NO</u> PUEDE SER BIYECTIVA.

c) $g \circ f = g(f(x,y)) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Porque } f(x,y)=x}}{=} g(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Porque } g(x)=(x,x)}}{=} (x,x)$

Claramente $g \circ f$ NO es $Id_{A \times A}$, ya que toma un par (x,y) y devuelve (x,x).