Introducción al Álgebra - Control 1

Pauta Problema 1

i) Demostrar, sin uso de tablas de verdad, que

$$[(p\vee q)\Leftrightarrow r] \Rightarrow [(q\Rightarrow r)\wedge(p\Rightarrow r)]$$ es una tautología.

1ra Forma: Por inspección

El caso de interés es suponer $[(p\vee q)\Leftrightarrow r]$ verdadero y

(1.0) probar que $[(q\Rightarrow r)\wedge(p\Rightarrow r)]$ es también verdadero.

Sea $r \Leftrightarrow V$, entonces $p\vee q \Leftrightarrow V$, pero lo que interesa es que $q\Rightarrow r$ es verdadero y $p\Rightarrow r$ es verdadero, por lo

(1.5) tanto $(q\Rightarrow r)\wedge(p\Rightarrow r)$ es verdadero.

Si $r\Leftrightarrow F \Rightarrow p\vee q \Leftrightarrow F \Leftrightarrow p, q$ son falsos y

(1.5) por lo tanto $(q\Rightarrow r)\wedge(p\Rightarrow r)$ son verdaderos y $(q\Rightarrow r)\wedge(p\Rightarrow r)$ es V

2a Forma: Transformando $[(q\Rightarrow r)\wedge(p\Rightarrow r)] \Leftrightarrow [(\bar{q}\vee r)\wedge(\bar{p}\vee r)]$

$\Leftrightarrow r\vee(\bar{p}\wedge\bar{q}) \Leftrightarrow r\vee\overline{p\vee q} \Leftrightarrow p\vee q \Rightarrow r$. Así la proposición

queda $[(p\vee q)\Leftrightarrow r] \Rightarrow [(p\vee q)\Rightarrow r]$ que es tautología.

ii) $A\subseteq E$ en que E es el conjunto universal con al menos dos elementos distintos. Demostrar que

$$[\forall B\in (P(E)\setminus\{\phi\})\, A\subseteq B] \Rightarrow A=\phi$$

En efecto, sea $B\in P(E)$, $B\neq\phi$ por lo tanto $A\subseteq B$

(1.0) Pero también $B^c\in P(E)$ y $B^c\neq\phi$ y entonces también $A\subseteq B^c$

En consecuencia $A\subseteq B \wedge A\subseteq B^c \Rightarrow A\subseteq \underbrace{B\cap B^c}_{\phi}$

(1.0) $\Rightarrow A\subseteq\phi$ (y $\phi\subseteq A$) Sigue que $A=\phi$

Pauta Problema 2

i) A, B no vacíos. Entonces $B\cap A=\phi \Rightarrow A\cup B^c = B^c$

1ero Forma: Sea $B\cap A=\phi$ por hipótesis

20 Entonces $B\cap A = \phi \;/\cup B^c \Rightarrow (B\cap A)\cup B^c = \phi \cup B^c$

$\Leftrightarrow (\underbrace{B\cup B^c}_{E})\cap(A\cup B^c) = B^c \Leftrightarrow \underbrace{E\cap(A\cup B^c)}_{A\cup B^c} = B^c$

20 $\Rightarrow A\cup B^c = B^c$

2ª Forma: Claramente $B^c\subseteq (A\cup B^c)$. Por demostrar q' $(A\cup B^c)\subseteq B^c$

En efecto, sea $x\in A\cup B^c \to x\in A \vee x\in B^c$

Si $x\in B^c \Rightarrow A\cup B^c\subseteq B^c$

Si $x\in A$, por hipótesis $(A\cap B=\phi)$, $x\notin B \Rightarrow x\in B^c$

Así, también $(A\cup B^c)\subseteq B^c$

ii) Sean A, B, X, Y conjuntos no vacíos y $X\subseteq Y$

Demostrar que $A\cap[X\cup(B\setminus(A\setminus X))]\subseteq A\cap Y$

En efecto, usando propiedades vistas, diferencias, morgan etc

Primer miembro $A\cap[X\cup(B\setminus(A\setminus X))] = A\cap[X\cup(B\cap(A\cap X^c)^c)]$

10 $= A\cap[X\cup(B\cap(A^c\cup X))] = A\cap[X\cup(B\cap A^c)\cup(B\cap X)]$

05 $= A\cap[\underbrace{X\cup(B\cap X)}_{X}\cup B\cap A^c] = A\cap[X\cup B\cap A^c]$ distrib

$= (A\cap X)\cup(\underbrace{A\cap B\cap A^c}_{\phi}) = (A\cap X)\cup\phi = A\cap X$ y

15 como $X\subseteq Y \Rightarrow (A\cap X)\subseteq(A\cap Y)$