

P1] Revisar Pauta Aux 3 P4

P2]  $f: A \rightarrow B$ ,  $g: C \subseteq B \rightarrow D$

y  $h: D \subseteq B \rightarrow D$

PDA:  $[g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h] \Leftrightarrow f \text{ sob}$

$\Rightarrow$ ] Razonemos por contradicción

$[g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h] \Rightarrow \underbrace{f \text{ sob}}_F$

queremos llegar a  $\underbrace{[g \circ f = h \circ f]}_V \Rightarrow \underbrace{g = h}_F$

para formar una contradicción  
es decir queremos encontrar  
 $g$  y  $h$  tal que cumplan

$g \circ f = h \circ f$  pero que  
sean distintas.

Recordar SON 3 LAS ELEMENTOS  
QUE DEFINEN UNA FUNCIÓN,  
"CONJUNTO DE PARTIDA", "DE LLEGADA"  
y "LO QUE LE HACE AL  $x$ "

Si UNA DE ESAS TRES COSAS SON  
DISTINTAS LAS FUNCIONES SON DISTINTAS

En este caso  $g \circ f = h \circ f$

veamos ambas  $A \rightarrow D \wedge g(f(x)) = h(f(x))$   
 $\forall x \in B$

dicho de otra forma

$$g(y) = h(y) \quad \forall y \in \text{Im}(f)$$

Es decir  $g$  y  $h$  tienen que comportarse igual en la Imagen de  $f$  y como  $f$  no es sobreyectiva

$$\text{Im}(f) \neq B \quad (\text{No son iguales})$$

así si tomamos

$$g: B \rightarrow D \quad \text{y} \quad h: \text{Im}(f) \rightarrow D$$
$$x \rightarrow g(x) \quad \quad \quad x \rightarrow h(x)$$

$$\text{con } g(x) = h(x) \quad \forall x \in \text{Im}(f)$$

$$\text{cumplen } g \circ f = h \circ f$$

$$\text{pero } g \neq h //$$

y formamos la contradicción  $\cap$

$\Leftarrow$  si  $f$  sobreyectiva

$$B = \text{Im}(f)$$

y como dijimos antes

$$g(f(x)) = h(f(x)) \quad \forall x \in A$$

$$\Rightarrow g(y) = h(y) \quad \forall y \in B$$

y ambas van de  $B \rightarrow D$

$$\therefore g = h //$$

## PAUTA AUXILIAR 4

P1) a) P.D.Q  $(\forall A, B \subseteq E) f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$

Sea  $y \in f(A) \setminus f(B)$  con  $A, B \subseteq E$  arbitrarios

$$\Leftrightarrow y \in f(A) \wedge y \notin f(B)$$

$$\Leftrightarrow \exists x_0 \in A : f(x_0) = y \wedge \nexists x_1 \in B : f(x_1) = y$$

$$\Leftrightarrow \exists x_0 \in A : f(x_0) = y \wedge \forall x_1 \in B : f(x_1) \neq y$$

$$\Rightarrow x_0 \in A \wedge x_0 \notin B \quad (\text{porque si } x_0 \in B \text{ entonces } f(x_0) \neq y)$$

$$\Leftrightarrow x_0 \in A \setminus B$$

$$\Rightarrow \exists x_0 \in A \setminus B : f(x_0) = y$$

$$\Rightarrow y \in f(A \setminus B)$$

b) como ya demostramos que  $(\forall A, B \subseteq E) f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$ ,

solo tenemos que demostrar que

$$[(\forall A, B \subseteq E) f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B)] \Leftrightarrow f \text{ es inyectiva}$$

$\Leftarrow$  Hipótesis:  $f$  inyectiva. P.D.Q  $(\forall A, B \subseteq E) f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B)$ .

Sea  $y \in f(A \setminus B)$ .

$$\Rightarrow \exists x_0 \in A \setminus B : f(x_0) = y$$

$$\Rightarrow \exists x_0 \in A : f(x_0) = y \quad (A \setminus B \subseteq A)$$

$$\Leftrightarrow y \in f(A) \quad \star$$

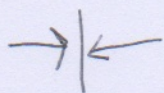
Ahora solo falta ver que  $y \notin f(B)$ .

Por contradicción, digamos que  $y \in f(B)$

$$\Leftrightarrow \exists x_1 \in B : f(x_1) = y$$

$$\Rightarrow f(x_1) = f(x_0) = y$$

$$\Rightarrow x_1 = x_0 \quad (\text{porque } f \text{ es inyectiva})$$



porque  $x_1 \in B$  y  $\underbrace{x_0 \in A \setminus B!}_{\Rightarrow x_0 \notin B}$

$$\therefore y \notin f(B)$$

Ahora, si volvemos atrás, por  $\star$  teníamos que  $y \in f(A)$

Entonces  $y \in f(A) \wedge y \notin f(B)$

$$\Leftrightarrow y \in f(A) \setminus f(B)$$

$$\therefore f \text{ inyectiva} \Rightarrow (\forall A, B \in E) f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B).$$

$\Rightarrow$  Hipótesis:  $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B) \quad \forall A, B \subseteq E$ .

P.D.Q:  $f$  es inyectiva  $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in E) f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$   
 $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2) x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Sea  $A = \{x_1\}$ ,  $B = \{x_2\}$   $x_1 \neq x_2$ .

En efecto:  $f(A) \setminus f(B) = f(\{x_1\}) \setminus f(\{x_2\}) \stackrel{\text{por hipótesis}}{=} f(\{x_1\} \setminus \{x_2\})$

Pero como  $x_2 \neq x_1$ ,  $\{x_1\} \setminus \{x_2\} = \{x_1\}$

$$\Rightarrow f(\{x_1\}) \setminus f(\{x_2\}) = f(\{x_1\})$$

$$\Rightarrow f(\{x_1\}) \cap f(\{x_2\}) = \emptyset$$

$$\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

$\therefore f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B) \quad \forall A, B \subseteq E \Rightarrow f$  es inyectiva

ya que demostramos la parte (a) y ambas implicancias, podemos concluir que

$(\forall A, B \subseteq E)$

$$f(A) \setminus f(B) = f(A \setminus B) \Leftrightarrow f \text{ es inyectiva}$$

c) P.D.Q  $(\forall Y \subseteq F) f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$

Sea  $y \in f(f^{-1}(Y))$

$\Leftrightarrow \exists x_0 \in f^{-1}(Y) : f(x_0) = y$

$\Leftrightarrow \exists w \in Y : f(x_0) = w : f(x_0) = y$

$\Rightarrow w = y$

$\Rightarrow y \in Y$

d) como ya demostramos que  $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y \quad \forall Y \subseteq F$ ,  
solo tenemos que demostrar que:

$[(\forall Y \subseteq F) Y \subseteq f(f^{-1}(Y))] \Leftrightarrow f \text{ es sobreyectiva}$

$\Leftarrow$  P.D.Q  $(\forall Y \subseteq F) Y \subseteq f(f^{-1}(Y))$

Sea  $y \in Y$ , ya que  $f$  es sobreyectiva,  $(\forall y \in F)(\exists x \in E) f(x) = y$

$\Rightarrow \exists x_0 \in f^{-1}(Y) \text{ tal que } f(x_0) = y$

$\Rightarrow f(x_0) \in f(f^{-1}(Y))$

$\Leftrightarrow y \in f(f^{-1}(Y))$

$\therefore f \text{ sobreyectiva} \Rightarrow [(\forall Y \subseteq F) Y \subseteq f(f^{-1}(Y))]$

$\Rightarrow$  1 P.D.Q  $f$  es sobreyectiva

$$\Leftrightarrow (\forall y \in F)(\exists x \in E) \text{ tal que } f(x) = y$$

$$\Leftrightarrow f(E) = F$$

ya que  $(\forall Y \subseteq F) f(f^{-1}(Y)) = Y$ , en particular

$$f(f^{-1}(F)) = F$$

$$\Rightarrow \underbrace{f^{-1}(f(f^{-1}(F)))}_{f^{-1}(F)} = \underbrace{f^{-1}(F)}_{=E} \text{ porque } F \text{ es función}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(F) = E$$

$\Leftrightarrow f$  es sobreyectiva

$$\therefore [(\forall Y \subseteq F) Y = f(f^{-1}(Y))]$$

ya que demostramos (c) y ambas implicancias, podemos concluir que

$$[(\forall Y \subseteq F) Y = f(f^{-1}(Y)) \Leftrightarrow f \text{ es sobreyectiva}]$$

e) P.D.Q  $(\forall Y \subseteq F) f^{-1}(Y^c) = (f^{-1}(Y))^c$

Sea  $x_0 \in (f^{-1}(Y))^c$

$$\Leftrightarrow x_0 \in \{x \in E : f(x) \notin Y\}^c$$

$$\Leftrightarrow x_0 \in \{x \in E : f(x) \in Y\}$$

$$\Leftrightarrow x_0 \in \{x \in E : f(x) \in Y^c\}$$

$$\Leftrightarrow x_0 \in f^{-1}(Y^c)$$

$$\therefore (\forall Y \subseteq F) f^{-1}(Y^c) = (f^{-1}(Y))^c$$

P4] a)  $f(0+0) = f(0) + f(0) = f(0)$   
 $\Rightarrow f(0) = 0 //$

b)  $0 = f(0) = f(m+(-m)) = f(m) + f(-m)$   
 $\Rightarrow f(-m) = -f(m) //$

c)  $\Rightarrow$ ] Ya sabemos que  $f(0) = 0$   
 y si  $f$  es inyectiva es directo  
 que  $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$

$\Leftarrow$ ]  $f(x) = f(y)$

$\Rightarrow f(x) - f(y) = 0$

$\Rightarrow f(x) + f(-y) = 0$  (por b))

$\Rightarrow f(x-y) = 0$  (por hip))

$\Rightarrow x-y = 0$

$\Rightarrow \boxed{x=y} \therefore f \text{ iny.} //$

$\therefore f \text{ iny} \Leftrightarrow f^{-1}(\{0\}) = \{0\} //$