MA1101-7 Introducción al Álgebra
Profesor: Maya Stein.
Auxiliar: Juan Pedro Ross.
Fecha: Jueves 7 de Abril.

Auxiliar Extra: Repaso Control 2

P1. Sea $\mathcal{U}$ un universo y $f : \mathcal{P}(\mathcal{U}) \to \mathcal{P}(\mathcal{U})$ la función definida por:

$$f(X) = X^c$$

Demuestre que f es biyectiva.

P2. Sean A, B y C tres conjuntos no vacíos. Sean $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to A$. Además se tiene que:

- $h \circ g \circ f$ es inyectiva
- $f \circ h \circ g$ es inyectiva
- $g \circ f \circ h$ es sobreyectiva

Demuestre que f, g, h son biyectivas.

P3. Considere el conjunto $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es biyectiva } \}$, es decir, el conjunto de todas las funciones biyectivas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Se define la función $\Psi : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ dada por:

$$\Psi(f, g) = (f \circ g)^{-1}$$

(a) Justifique por qué $\forall (f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$, $\Psi(f, g) \in \mathcal{F}$.

(b) Pruebe que Ψ es sobryetectiva, pero **no** inyectiva.

(c) Demuestre que para todo par $(f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$,

$$\Psi(\Psi(f, g), \Psi(g^{-1}, f^{-1})) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}.$$

(d) *[Propuesto]* Sean $f, g \in \mathcal{F}$ definidas por $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = \dfrac{x}{2}$. Además considere el conjunto $A = \{f, g\}$.
Encuentre explícitamente $\Psi(A \times A)$.

P4. Una función se dice estrictamente creciente si y sólo si

$$(\forall x, y \in Dom(f)), x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

(a) Pruebe que toda función estrictamente creciente es inyectiva

(b) Si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es estrictamente creciente, ¿es sobreyectiva?

(c) Pruebe que si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente es sobreyectiva, entonces $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$