

MA1101-5 Introducción al Álgebra

Profesor: Maya Stein

Auxiliar: Juan Pedro Ross

Fecha: 5 de Abril del 2016



Auxiliar 4: Funciones 2.0

Resumen:

Sea $f : A \rightarrow B$, $g : C \rightarrow D$

- $g \circ f$ SOLO TIENE SENTIDO CUANDO $B \subseteq C$.
- $g \circ f$ inyectiva $\Rightarrow f$ inyectiva.
- $g \circ f$ sobreyectiva $\Rightarrow g$ sobreyectiva.
- $g \wedge f$ inyectivas $\Rightarrow f \circ g$ inyectiva.
- $g \wedge f$ sobreyectivas $\Rightarrow f \circ g$ sobreyectiva.
- $g \wedge f$ biyectivas $\Rightarrow f \circ g$ biyectiva con $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$
- Dado $A' \subseteq A$, de define el conjunto **imagen de A'** como

$$f(A') = \{y \in B \mid (\exists x \in A') f(x) = y\}.$$

- Dado $B' \subseteq B$, de define el conjunto **preimagen de B'** como

$$f^{-1}(B') = \{x \in A \mid f(x) \in B'\}$$

- $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

P1. Sean A, B conjuntos no vacíos y $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow A$ y $h : B \rightarrow B$ funciones tales que:

- h es biyectiva
- $f \circ g = h$
- $g \circ f = Id_A$

(a) Muestre que f y g son biyectivas.

(b) Muestre que $h = Id_B$.

P2. Sea $f : A \rightarrow B$ una función, con A y B no vacíos. y $g : C \subseteq B \rightarrow D$, $h : D \subseteq B \rightarrow D$ Pruebe que:
 $[g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h] \Leftrightarrow f$ es sobreyectiva.

P3. Sea $f : E \rightarrow F$ una función. Demuestre que:

- a) $(\forall A, B \subseteq E) f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$.
- b) $[(\forall A, B \subseteq E) f(A) \setminus f(B) = f(A \setminus B)] \Leftrightarrow f$ es inyectiva.
- c) $(\forall Y \subseteq F) f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$.
- d) $[(\forall Y \subseteq F) Y = f(f^{-1}(Y))] \Leftrightarrow f$ es sobreyectiva.
- e) $(\forall Y \subseteq F) f^{-1}(Y^c) = (f^{-1}(Y))^c$.

P4. Sea $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ una función con la siguiente propiedad $f(m + n) = f(m) + f(n)$ para cada par $m, n \in \mathbb{Z}$

- a) Probar que $f(0) = 0$.
- b) Probar que $f(-m) = -f(m)$ para cada $m \in \mathbb{Z}$.
- c) Probar que f es inyectiva si y solo si $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$.