MA1101-5 Introducción al Álgebra
Profesor: Maya Stein
Auxiliar: Juan Pedro Ross
Fecha: Jueves 31 de Marzo.

Auxiliar 3: Funciones

Resumen:

Sea $f : A \to B$ una función.

- f es inyectiva $\Leftrightarrow (\forall x, y \in A)\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.
- f es sobreyectiva $\Leftrightarrow (\forall y \in B)(\exists x \in A)\ f(x) = y$.
- f es biyectiva $\Leftrightarrow$ f es inyectiva y sobreyectiva.
- Si f es biyectiva, tiene inversa f^{-1}, y es tal que $(\forall x \in A)(\forall y \in B)(f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x)$.

P1. Sea $E \neq \emptyset$ un conjunto fijo. $\forall A \in \mathcal{P}(E)$ se define la función caracterísitica de A como:

$$\begin{aligned} \delta_A : E &\longrightarrow \{0,1\} \\ x &\longmapsto \delta_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

(a) Describa $\delta_E(x)$ y $\delta_\emptyset(x), \forall x \in E$.

(b) Demuestre que $\forall x \in E$ se tiene que $\delta_{A\cap B}(x) = \delta_A(x)\delta_B(x)$.

(c) Si $C, D \in \mathcal{P}(E)$ entonces $C \subseteq D \Leftrightarrow (\forall x \in E)\delta_C(x) \leq \delta_D(x)$.

(d) Demuestre que $A = B \Leftrightarrow \delta_A = \delta_B$.

(e) Determine condiciones para que δ_A sea inyectiva.

(f) Determine condiciones para que δ_A sea sobreyectiva.

P2. Sean A, B, C, D conjuntos no vacíos tales que $A \cap C = \emptyset$ y $B \cap D = \emptyset$ y sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : C \to D$ dos funciones. Se define $h : A \cup C \to B \cup D$ tal que, $\forall x \in A \cup C$:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in A \\ g(x) \text{ si } x \in C \end{cases}$$

(a) Demuestre que si f, g son inyectivas, entonces h también lo es.

(b) Demuestre que si f, g son sobreyectivas, entonces h también lo es.

(c) Demuestre que si f, g son biyectivas, entonces h también lo es y encuentre su inversa.

P3. Sean A, B conjuntos no vacíos. Se define $\phi : A \times B \longrightarrow A$, $\phi(x, y) = x$.

(a) Demuestre que ϕ es sobreyectiva.

(b) Demuestre que ϕ es biyectiva si y solo si B tiene exactamente un elemento.

(c) Para las condiciones anteriores, encuentre la inversa de ϕ.

P4. Sea $E = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f \text{ es biyectiva }\}$. Es decir E contiene a todas las funciones biyectivas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Se define la función $\Psi : E \to E$ tal que para cada $f \in E, \Psi(f) = f^{-1}$, es decir, Ψ le asocia a cada función en E su inversa.

a) Probar que Ψ es biyectiva.

b) Sean $f, g \in E$. Probar que $\Psi(f \circ g) = \Psi(g) \circ \Psi(f)$.

P5. Sean A, B conjuntos no vacíos y $f : A \longrightarrow B$, $g : B \to A$ y $h : B \to B$ funciones tales que:

- h es biyectiva
- $f \circ g = h$
- $g \circ f = Id_A$

(a) Muestre que f y g son biyectivas.

(b) Muestre que $h = \mathrm{Id}_B$.

P6. *[Propuesto]* Para $a, b \in \mathbb{R}$ considere la recta $L_{a,b} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = ax + b\}$ y la colección de rectas $\mathcal{L} = \{L_{a,b} \subseteq \mathbb{R}^2 | a, b \in \mathbb{R}\}$. Se define el conjunto de pares de rectas no paralelas

$$\mathcal{H} = \{(L, L') \in \mathcal{L}^2 | L \cap L' \neq \emptyset, L \neq L'\}$$

y la función $\psi : \mathcal{H} \to \mathbb{R}^2$ tal que $\psi((L, L')) = (x_0, y_0)$, donde (x_0, y_0) es el único punto de intersección de L y L'. Pruebe que ψ es sobreyectiva.