

Veamos el siguiente ej.

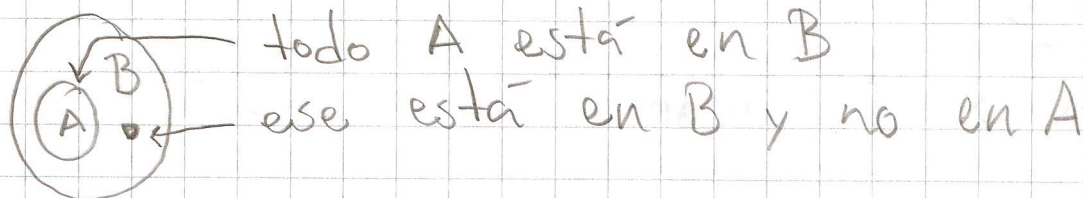
P1) $(X \cup A = Y \cup A) \wedge (X \cap A = Y \cap A) \Rightarrow X = Y$

Como tenemos que demostrar una igualdad de conjuntos utilizaremos el método más típico

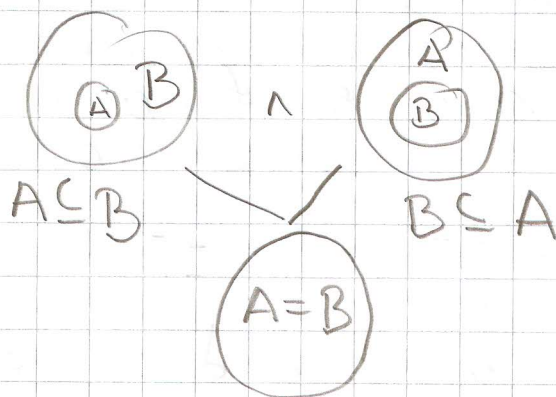
$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

¿Que significa eso?

$A \subseteq B$ es A subconjunto de B
o sea todo elemento de A está
en B OJO QUE NO SIGNIFICA
que todo elemento de B está en A
perfectamente B puede ser más
grande que A



sin embargo



(igual es lógico todo B está en A y
todo A en B $\Rightarrow A = B$)

Bueno volvamos al ejercicio,

$$\text{PDQ: } X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X$$

Vamos por partes

$$\text{PDQ: } X \subseteq Y \text{ es decir } \forall x \in X \Rightarrow x \in Y$$

como lo que tenemos que demostrar es un para todo (si hubiese al menos un elemento en X que no este en Y , X no podría ser subconjunto de Y)
no me sirve tomar un ejemplo sino que tengo que tomar uno alquiera

Sea $x \in X$ veamos que $x \in Y$

¿y ahora qué? bueno fíjate que estás demostrando una implicancia la cual solo es falsa cuando $V \Rightarrow F$ es decir es verdadero que

$$X \cup A = Y \cup A \wedge X \cap A = Y \cap A$$

y como es verdadero es información que hay que usar.

Debes recordar que

$$\underbrace{X \cap A} \subseteq \underbrace{X} \subseteq \underbrace{X \cup A}$$

acá viven todos
los que viven
tanto en X como en A
EN AMBOS

acá viven todos
los que están
en X o en A
EN CUALQUIERA DE LOS DOS

entonces digamos sea $x \in X$

¿Cual uso $X \cup A$ o $X \cap A$?
piénsalo ¿en cuál de las dos estás
seguro que x también está? en $X \cup A$!
(¿por que no $X \cap A$? pues porque por
ahora nada me dice que ese
 x también vive en A)

$$\Rightarrow x \in X \cup A = Y \cup A$$

$$\Rightarrow x \in Y \cup A \Leftrightarrow x \in Y \vee x \in A$$

en general! cuando se llega a una
unión es necesario ponerse en casos
pues de lo único que estoy
seguro es que está en alguno
de los dos ¿En cuál? ni idea,
quizás esté en ambos, quizás solo
en Y , quizás solo en A .

Caso 1 | $x \in A$

¿y ahora? siempre que llegues a un punto donde pareciera que no hay nada que hacer revisa la información que tienes, la que no has usado.

¿ $X \cap A = Y \cap A$? para vivir ahí x tiene que estar tanto en X como en A
! Pero si ese es justo el caso!

$$\Rightarrow x \in X \cap A = Y \cap A$$

$$\Rightarrow x \in Y \cap A \Rightarrow x \in A \quad \wedge \quad \boxed{x \in Y}$$

fíjate tomaste un x CUALQUIERA que estaba en X y ahora estás en Y

$\Rightarrow X \subseteq Y$, pero aún falta el otro caso.

Caso 2 | $x \in Y$

¿y ahora? NADA fíjate ya llegaste!

$$\Rightarrow X \subseteq Y$$

Veamos ahora que $Y \subseteq X$

pero si te fijas tu tienes exactamente la misma información de X y de Y es decir la demostración sería exactamente igual cambiando las letras " X " por " Y s" y viceversa.

y ahora es cuando uno usa la frase mágica

Análogamente se tiene $Y \subseteq X$

$$\Rightarrow X \subseteq Y \wedge Y \subseteq X \Rightarrow Y = X //$$

OJO PARA USAR LA FRASE ANALOGAMENTE TIENES QUE ESTAR SEGURO QUE TIENES EXACTAMENTE LA MISMA INFORMACIÓN

El resumen en matemáticas

$$\text{Sea } x \in X \xRightarrow{\text{propiedad conocida}} x \in X \cup A \xRightarrow{\text{hipótesis}} x \in Y \cup A \xRightarrow{\text{def}} x \in Y \vee x \in A$$

$$\text{si } x \in Y \Rightarrow X \subseteq Y //$$

$$\text{si } x \in A \text{ como } x \in X \Rightarrow x \in X \cap A \xRightarrow{\text{Hip.}} x \in Y \cap A \Rightarrow x \in Y \wedge x \in A$$

$$\Rightarrow X \subseteq Y$$

análogamente $Y \subseteq X \Rightarrow X = Y //$ se tiene lo pedido

12]

$$a) A \subseteq C \Rightarrow A \setminus B = C \setminus (B \cup (C \setminus A))$$

$$x \setminus y = x \cap y^c = C \cap (B \cup (C \setminus A))^c$$

$$\text{De Morgan} = C \cap (B^c \cap (C \setminus A)^c)$$

$$\text{De Morgan} = C \cap B^c \cap (C^c \cup A)$$

$$\text{conmutatividad} = B^c \cap C \cap (C^c \cup A)$$

$$\text{distributividad} = B^c \cap ((C \cap C^c) \cup (C \cap A))$$

$$\text{pda. apunte} = B^c \cap (\emptyset \cup (C \cap A))$$

$$\text{pues } A \subseteq C = B^c \cap (C \cap A)$$

$$= B^c \cap A$$

$$\text{conmutatividad} = A \cap B^c$$

$$\text{pda. apunte} = A \setminus B //$$

$$b) (A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$$

Primera forma

$$(A \cap B^c) \cup (A \cap C^c)$$

$$= (A \cup A) \cap (A \cup C^c) \cap (B^c \cup A) \cap (B^c \cup C^c)$$

$$= A \cap (A \cup C^c) \cap (A \cup B^c) \cap (B^c \cup C^c)$$

distrib.
commut.

NOTEMOS QUE $A \cup X \supseteq A$ sea cual sea la cosa, por lo tanto $(A \cup X) \cap A = A \quad \forall X$

$$\Rightarrow A \cap (A \cup B^c) \cap (B^c \cup C^c)$$

$$= A \cap B^c \cup C^c \text{ (mismo argumento)}$$

$$= A \cap (B \cap C)^c \text{ (de Morgan)}$$

$$= A \setminus (B \cap C) //$$

de Morgan

segunda forma

$$(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$$

$$\supseteq \text{ sea } x \in A \setminus (B \cap C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin (B \cap C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin B \vee x \notin C)$$

$$\text{si } x \notin B \Leftrightarrow x \in A \setminus B \Rightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

$$\text{si } x \notin C \Rightarrow x \in A \setminus C \Rightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

$$\therefore A \setminus (B \cap C) \subseteq (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

$$\subseteq \text{ sea } x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \setminus B \vee x \in A \setminus C$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C)$$

en cualquiera de los dos casos $x \in A$

$$\text{si } x \notin B \Rightarrow x \notin (B \cap C) \Rightarrow x \in A \setminus (B \cap C)$$

$$\text{si } x \notin C \Rightarrow x \notin (B \cap C) \Rightarrow x \in A \setminus (B \cap C)$$

$$\therefore (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \subseteq A \setminus (B \cap C)$$

$$\therefore (A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$$

tercera forma

$$(A \cap B^c) \cup (A \cap C^c)$$

$$= A \cap (B^c \cup C^c)$$

$$= A \cap (B \cap C)^c$$

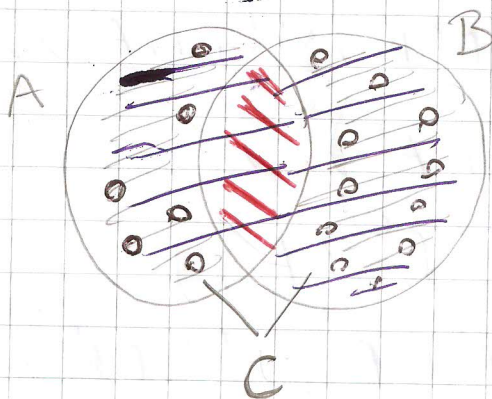
$$= A \setminus (B \cap C)$$

(distributividad o "factorizar")
de Morgan.

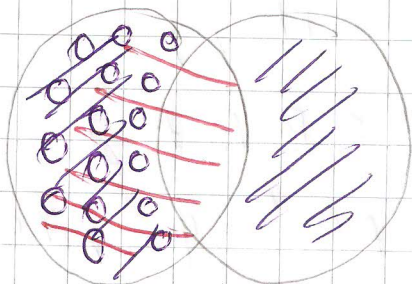
$$c) A \Delta B = C \Rightarrow B = A \Delta C$$

Demos una pequeña intuición
Primero recordando que

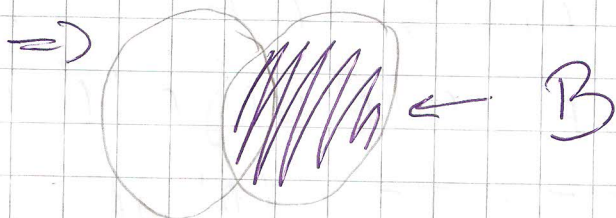
$$A \Delta B = A \setminus B \cup B \setminus A = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$



$$\begin{array}{l} \text{Blue} \quad A \cup B \\ \text{Red} \quad A \cap B \\ \text{Blue} \quad A \Delta B = C \end{array}$$



$$\begin{array}{l} \text{Blue} \quad C \\ \text{Blue} \quad A \\ \Rightarrow A \cup C = \text{TODO} \\ \text{Blue} \quad A \cap C \\ \Rightarrow B = \text{TODO} \setminus \text{Blue} \end{array}$$



Y AHORA MATEMÁTICAS

$$A \Delta B = C \Rightarrow B = A \Delta C$$
$$(A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) = C$$

$$\Rightarrow A \Delta C = A \setminus C \cup C \setminus A$$

$$A \setminus C = A \cap C^c = A \cap ((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c))^c$$

$$= A \cap ((A \cap B^c)^c \cap (B \cap A^c)^c)$$

$$= A \cap ((A^c \cup B) \cap (B^c \cup A))$$

$$= A \cap ((A^c \cap B^c) \cup (A^c \cap A) \cup (B \cap B^c) \cup (B \cap A))$$

$$= A \cap ((A^c \cap B^c) \cup (B \cap A))$$

$$= (A \cap A^c \cap B^c) \cup (A \cap B \cap A)$$

$$= A \cap B // A \text{ (pues } A \cap A^c = \emptyset \text{ y } x \cup \emptyset = x)$$

$$C \setminus A = ((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)) \cap A^c$$

$$= (A \cup B) \cap (A \cup A^c) \cap (B^c \cup B) \cap (B^c \cup A^c) \cap A^c$$

$$= (A \cup B) \cap \bigcup \cap \bigcup \cap (B^c \cup A^c) \cap A^c$$

$$= (A \cup B) \cap (B^c \cup A^c) \cap A^c$$
$$= (A \cup B) \cap A^c = (A^c \cap A) \cup (B \cap A^c)$$
$$= B \cap A^c$$

$$\text{finalmente } (A \cap B) \cup (B \cap A^c) = B \cap (A \cup A^c) = B //$$

P3

$\forall x, y \in P(U)$ Reasonemos por contradicción

$$\underbrace{(A \cup X = A \cup Y \Rightarrow X = Y)}_{\text{V}} \Rightarrow \underbrace{A = \emptyset}_{\text{F}}$$

como $A \neq \emptyset \Rightarrow \exists x_0 \in A$

Como la hipótesis se cumple para TODO x, y se me tiene que ocurrir algún X y algún Y que cumplan que al unirse a A sean iguales pero que sean distintos mmh...

En general estos problemas no piden que te inventes algo muy complicado siempre es del estilo vacío o un singleton o Universo, en este caso si tomamos

$$X = \{x_0\} \text{ y } Y = \emptyset$$

$A \cup X = A = A = A \cup \emptyset$ pues el x_0 ya estaba en A y cuando agrego vacío no pasa nada

y es claro que $X \neq Y$ —

$$\Rightarrow \underbrace{(A \cup X = A \cup Y \Rightarrow X = Y)}_{\text{V}} \Rightarrow \text{F} \Rightarrow \text{V}$$

$$(A \cup B) \in \mathcal{P}(C \cap D) \Rightarrow A \in \mathcal{P}(C) \wedge B \in \mathcal{P}(C)$$

recordemos primero el concepto de partes

$$X \in \mathcal{P}(Y) \Leftrightarrow X \subseteq Y$$

es decir si X es subconjunto

$$\text{ej: } Y = \{1, 2\}$$

$$\Rightarrow 1 \in \mathcal{P}(Y) \text{ NO!}$$

$$\{1\} \in \mathcal{P}(Y) \text{ SÍ!}$$

$$\mathcal{P}(Y) = \{ \underline{\phi}, \{1\}, \{2\}, \underline{\{1, 2\}} \}$$

SIEMPRE EL VACÍO Y EL CONJUNTO MISMO PERTENECEN A LAS PARTES pues

$$\forall A \quad \phi \subseteq A \quad \wedge \quad A = A \Leftrightarrow A \subseteq A \quad \wedge \quad A \subseteq A$$

$$\text{ADEMÁS} \quad \text{Si } C \subseteq A \quad B \subseteq C \\ C \in \mathcal{P}(A) \quad B \in \mathcal{P}(C) \\ \Rightarrow B \in \mathcal{P}(A) \\ B \subseteq A$$

es decir si yo estoy en las partes de A TODOS MIS SUBCONJUNTOS TAMBIÉN ESTÁN

Volviendo al ejercicio

$$A \cup B \in P(C \cap D) \Rightarrow A \in P(C) \wedge B \in P(C)$$

Recordemos que la única forma que esto sea falso es $\forall \Rightarrow F$
por lo tanto lo primero es verdad.
es información que HAY QUE USAR.

$$A \cup B \in P(C \cap D)$$

$$A \cup B \subseteq C \cap D$$

como dije antes $A \subseteq A \cup B \subseteq C \cap D$

$$\Rightarrow A \subseteq C \cap D \quad (\text{todos los elementos de } A \text{ están en } C \text{ y } D)$$

en particular

$$A \subseteq C \Leftrightarrow A \in P(C)$$

de la misma forma $B \subseteq A \cup B \subseteq C \cap D$

$$\Rightarrow B \subseteq C \cap D$$

$$\Rightarrow B \in P(C \cap D) //$$

Por lo tanto $A \cup B \in P(C \cap D) \Rightarrow A \in P(C) \wedge B \in P(C)$
es verdadero.

P4

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset\}$$

esto es equivalente a

$$A \cap B \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \neq \{\emptyset\}$$

$$A \cap B \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists x_0 \in A \cap B$$

$$\Leftrightarrow \exists x_0 \text{ t.q. } x_0 \in A \wedge x_0 \in B$$

$$\Leftrightarrow \exists x_0 \text{ t.q. } \{x_0\} \subseteq A \wedge \{x_0\} \subseteq B$$

$$\Leftrightarrow \exists x_0 \text{ t.q. } \{x_0\} \in \mathcal{P}(A) \wedge \{x_0\} \in \mathcal{P}(B)$$

$$\Leftrightarrow \exists x_0 \text{ t.q. } \{x_0\} \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$$

$$\Rightarrow \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \neq \{\emptyset\}$$

Si bien pareciera ser una equivalencia y no un, implica falta cubrir un caso

$$\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset\}?$$

JAMÁS PUES siempre al menos el vacío está en las partes

$$\text{Y AHORA SI } \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \neq \{\emptyset\}$$

$$\Rightarrow \exists x_0 \text{ t.q. } \dots$$

Continuar hacia arriba.

$$\therefore A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset\}$$

es verdadero.

$$H = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = x\} \Rightarrow x^2 = x \Leftrightarrow x^2 - x = 0$$

$$x(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x=0 \vee x=1}$$

$$\Rightarrow H = \{0, 1\}$$

$$\Rightarrow P(H) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$$

Es cierto que todos esos cumplen que todos sus elementos al cuadrado son ellos mismos?

SI! es claro en los últimos tres
¿y en el primero?

$$\underbrace{?}_{\text{F}} \quad x \in \emptyset \Rightarrow x^2 = x?$$

F

Si el inicio es FALSO ALTIRO!
LA IMPLICANCIA ES VERDADERA!

PS

$$(\exists y)(p(y) \Rightarrow (\forall x) p(x))$$

primera forma: contradicción

$$(\exists y)(p(y) \Rightarrow (\forall x) p(x))$$

$$\Rightarrow (\forall y)(p(y) \Rightarrow (\forall x) p(x))$$

$$\text{asumimos } p(y) \text{ V } \wedge (\forall x) p(x) \text{ F} \\ \Rightarrow (\exists x) \overline{p(x)} \text{ V}$$

$$\text{leamos que dice } (\forall y)(p(y) \wedge (\exists x) \overline{p(x)})$$

para todo y se cumple $p(y)$ y hay un x que cumple no $p(x)$

Contradicción pues ese x tiene que cumplir y no cumplir p al mismo tiempo

$\Rightarrow$ la proposición es siempre Verdadera.

segunda forma $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \overline{p} \vee q$

$$(\exists y)(\overline{p(y)} \vee (\forall x) p(x))$$

hay uno que no lo cumple o todos lo cumplen claramente es verdadero siempre pues son afirmaciones contrarias
Y NO HAY OTRA OPCION, ASIQUE ALGUNO ES V Y COMO

P7

$$((p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge r)) \Rightarrow [(q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r)]$$

Razonando por contradicción

$$(q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r) \Leftrightarrow F$$

$$(p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge r) \Leftrightarrow V$$

$$\Rightarrow (q \Rightarrow p) \Leftrightarrow F \quad \vee \quad (p \Rightarrow r) \Leftrightarrow F$$

$$\text{Caso 1} \quad \begin{array}{cc} (p \Rightarrow r) \Leftrightarrow F \\ \begin{array}{cc} \sqcup & \sqcup \\ V & F \end{array} \end{array}$$

$$(p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge r)$$

$$V \vee q \Leftrightarrow V \wedge r$$

$$\begin{array}{ccc} V & \Leftrightarrow & r \\ \rightarrow & & \leftarrow \\ \text{,} & & \text{,} \end{array}$$

$$\text{Caso 2} \quad \begin{array}{cc} (q \Rightarrow p) \Leftrightarrow F \\ \begin{array}{cc} \sqcup & \sqcup \\ V & F \end{array} \end{array}$$

$$(p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge r)$$

$$\begin{array}{ccc} V & \Leftrightarrow & F \wedge r \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} V & \Leftrightarrow & F \\ \rightarrow & & \leftarrow \\ \text{,} & & \text{,} \end{array}$$

Siempre haber más casos la proposición siempre es verdadera.