MA1101-3 Introducción al Álgebra
Profesor: Pablo Dartnell.
Auxiliar: Felipe Atenas M.

Resumen Control 1

A continuación se presenta un resumen de los contenidos del control 1 del curso Introducción al Álgebra. Ojo que es un resumen, por lo que puede no contener todo lo necesario para el control, pero sí lo esencial. Mi consejo es que ustedes mismos elaboren su propio resumen, porque son ustedes mismos los que saben qué cosas manejan bien y las que no manejan tan bien. Consideraremos que p, q y r son proposiciones y que A y B son conjuntos.

Lógica

1. $(p \wedge \sim p) \Leftrightarrow F$ y $(p \vee \sim p) \Leftrightarrow V$
2. $p \wedge V \Leftrightarrow p, \quad p \vee V \Leftrightarrow V, \quad p \wedge F \Leftrightarrow F, \quad p \vee F \Leftrightarrow p$
3. Caracterización de la implicancia: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$
4. Leyes de De Morgan: $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$ y $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$
5. Se tiene conmutatividad y asociatividad para $\wedge$ y $\vee$.
6. Distributividad: $[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$ y $[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$.
   Ojo que gracias a la conmutatividad, también se puede distribuir por la derecha.
7. Equivalencia dividida en dos partes: $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$
   Ojo que esta caracterización la usarán por el resto de sus vidas... o al menos en plan común.
8. Transitividad: $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
   Ojo que la implicancia al revés no se tiene (necesariamente).
9. Contrarrecíproca: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$
10. Reducción al absurdo: $\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$
    Ojo que podrían no recordar esta, pero podrían deducirla negando la caracterización del implica.
11. Existencia y unicidad: $(\exists! x)p(x) \Leftrightarrow \underbrace{[(\exists x)p(x)]}_{\text{existencia}} \wedge \underbrace{[(\forall x)(\forall y)\{(p(x) \wedge p(y)) \Rightarrow (x = y)\}]}_{\text{unicidad}}$
12. Hay una tautología que a veces queda en el olvido y quizás, tan solo quizás, sea bueno que la sepan/recuerden: $(p \wedge q) \Rightarrow p$. Es muy fácil de demostrar con matraca. Solo usen la caracterización del implica. Si la llegan a usar en el control, DEBEN DEMOSTRARLA.

Conjuntos

1. Inclusión: $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$
   Ojo que esto es muy útil para demostrar. De hecho, en general se usa esta definición. Además bajo esto, se tiene que $A \subseteq A$ para todo conjunto A (espero no ofenderlos con esta última aclaración).
2. Igualdad como doble inclusión: $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$
   Ojo, esta es una caracterización muy usada para demostrar igualdad entre conjuntos. Notar que es una equivalencia.
3. Transitividad: $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$
4. Para conjunto potencia, es importante recordar que: $\phi \subseteq A$, para todo conjunto A.
5. Unión: $(\forall x)[(x \in A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)]$

6. Intersección: $(\forall x)[(x \in A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)]$

7. Si $A \subseteq B$, entonces $A \cup B = B \quad \text{y} \quad A \cap B = A$.
Para recordar estas igualdades, pueden imaginarse los diagramas de Venn.

8. Se tiene conmutatividad y asociatividad para $\cap$ y $\cup$.

9. Distributividad: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{y} \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
Ojo que gracias a la conmutatividad, también se puede distribuir por la derecha.

10. Inclusiones importantes: $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B \quad \text{y} \quad A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$.
En verdad estas dos propiedades son equivalentes, dada la arbitrariedad de los conjuntos A y B. Basta intercambiar los roles.

11. Asumimos la existencia de un conjunto universo $\mathcal{U}$. En la práctica esto no es tan relevante, ya que importa más en un sentido axiomático.

12. Igualdades importantes: $A \cup \phi = A \quad \text{y} \quad A \cap \phi = \phi, \quad A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U} \quad \text{y} \quad A \cap \mathcal{U} = A$.

13. Complemento: $(\forall x)(x \in A^c \Leftrightarrow x \in \mathcal{U} \wedge x \notin A)$.
El lado derecho de la equivalencia es igual a $x \notin A$ pues $x \in \mathcal{U}$ es siempre V.

14. Diferencia: $A \setminus B = A \cap B^c$

15. Leyes de De Morgan: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad \text{y} \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

16. $(A \subseteq B) \Leftrightarrow (B^c \subseteq A^c)$
Ojo con esta propiedad. No estoy seguro si se admite como sabida, porque si bien aparece en el apunte, una vez en un control pidieron demostrarla.

17. Propiedades importantes: $A \cup A^c = \mathcal{U} \quad \text{y} \quad A \cap A^c = \phi$

18. Diferencia simétrica: $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
Para recordar esta operación imaginen su diagrama de Venn. Aparece en el apunte en la página 21.

19. Conjunto Potencia: $(\forall X)(X \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow X \subseteq A)$.
En simples (?) palabras, el conjunto potencia es el conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto. Notar que siempre $\phi, A \in \mathcal{P}(A)$.

20. Par ordenado: $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

21. Igualdad entre pares ordenados: $(a, b) = (x, y) \Leftrightarrow a = x \wedge b = y$

22. Producto Cartesiano: $(\forall x, y)[(x, y) \in A \times B \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B]$

23. Cuantificadores sobre conjuntos:
    - Para todo: $(\forall x \in A)p(x) \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow p(x))$
    - Existencia: $(\exists x \in A)p(x) \Leftrightarrow (\exists x)(x \in A \ \wedge p(x))$

24. Negación de cuantificadores:
    - Para todo: $\overline{(\forall x \in A)p(x)} \Leftrightarrow (\exists x \in A)\overline{p(x)}$
    - Existencia: $\overline{(\exists x \in A)p(x)} \Leftrightarrow (\forall x \in A)\overline{p(x)}$

Cualquier comentario o consulta a felipe.e.atenas@gmail.com
Éxito en el estudio!