

Mentiras verdaderas

Jesús Puente Arrubarrena
Licenciatura en Matemáticas Aplicadas, ITAM
jparrubarrena@hotmail.com

Ganador del segundo lugar en el I
Concurso de Ensayo de Matemáticas
Aplicadas



Todos mis hermanos mayores viven en Europa, trabajan en un país llamado Australia, radican en El Cabo. Todos ellos estudiaron matemáticas y todos los que no nacieron en México se especializaron en pediatría. Los que nacieron en Líbano ya se han casado y los demás vendrán próximamente a vivir a México.

basta con escribir

$10=2*5$
 $12=2*6$
 $14=2*7$
 $16=2*8$
 $18=2*9$
 $20=2*10$



Podría parecer que miento, pero todo lo que el párrafo anterior dice es verdad, y no es porque yo sea un ignorante, tenga una familia numerosa y extravagante, o esté loco, sino porque soy primogénito.

Si queremos demostrar que una proposición es falsa, es suficiente dar un contraejemplo, esto es, un caso en el que se cumplen las hipótesis, pero no la conclusión. Me viene a la mente la proposición.

Para probar proposiciones matemáticas es necesario demostrar que cada caso que cumple las hipótesis, necesariamente cumple la conclusión. Por ejemplo, si quiero demostrar que

Todos los abogados detestan las matemáticas.

Todos los números pares entre el 10 y el 20 son divisibles por 2.

Esta proposición es falsa pues Pierre de Fermat era abogado y disfrutaba de las matemáticas en sus ratos libres, de hecho sus contribuciones han sido muy importantes

para la teoría de números.



Pierre de Fermat

El primer párrafo de este ensayo pertenece a un conjunto trivial: cuando no existe caso alguno que satisfaga las hipótesis, es decir, la naturaleza de las hipótesis es tal que siempre son falsas. Entonces suele decirse de la demostración que es por vacuidad, y lo que puede parecer extraño es que estas proposiciones no son falsas ni indeterminadas (una proposición tiene que ser por definición falsa o verdadera), sino verdaderas. Es sencillo enunciar la razón, pero cuesta un poco de trabajo aceptarla: si no hay ningún caso que cumpla las hipótesis, entonces puede trivialmente decirse que todos los casos que cumplen las hipótesis necesariamente satisfacen la conclusión, pues simple y sencillamente no hay ninguno de éstos. Otro modo de verlo es que no se puede comprobar que sea falso pues para dar un contraejemplo necesitamos por fuerza que haya un caso que cum-

pla las hipótesis y no satisfaga la conclusión, pero como éste no existe, entonces no hay de dónde echar mano para probar la falsedad de la proposición. No es que seamos legalistas en el aspecto de que todas las proposiciones son verdaderas hasta que no se demuestre lo contrario, sino que simplemente no existe caso alguno en el que las hipótesis se satisfagan.

Entonces, regresando al párrafo inicial:

Todos mis hermanos mayores viven en Europa

Debe interpretarse como: Todas las personas que pertenecen al conjunto de mis hermanos mayores pertenecen al conjunto de la gente que vive en Europa. La proposición es verdadera dado que yo no tengo hermanos mayores.

Del mismo modo podemos decir que es cierto que:

Todos mis hermanos mayores trabajan en Australia

y que

Todos mis hermanos mayores radican en El Cabo.

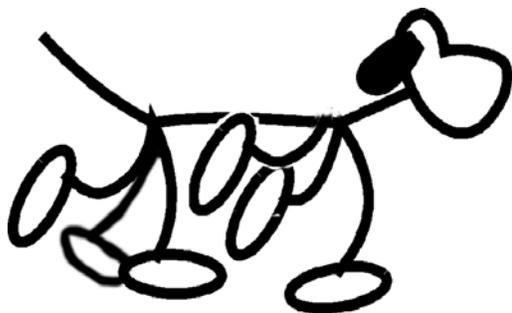
El resto de las proposiciones se demuestran igualmente por vacuidad.

De este modo podemos ver que el párrafo introductorio, aunque parezca una gran falacia (pues ni Australia ni El Cabo están en Europa además de que El Cabo no está en Australia), no lo es.

Asimismo podemos decir que las siguientes dos proposiciones:

Todos los perros que tienen seis patas son negros

Todos los perros que tienen seis patas son blancos



Son verdaderas aunque parezcan recíprocamente excluyentes, pues no hay perros con 6 patas, nótese que si existiera tal mutante, entonces la verdad de una proposición de las anteriores implicaría la falsedad de la otra y no podrían ser ambas verdaderas -habría únicamente perros de 6 patas blancos y no negros, haciendo la segunda proposición falsa; habría solamente negros y no blancos, siendo falsa la primera; o bien habría tanto perros de seis patas negros como blancos, haciendo a

ambas proposiciones falsas -pero como no es el caso (o, por lo menos, el incauto autor no está al tanto), entonces ambas proposiciones son verdaderas.

Si observamos con cuidado las propiedades del ejemplo anterior, tomándolo desde otro enfoque, encontramos que si de alguna forma yo llego a probar que dos proposiciones de la forma:

Si ciertos elementos cumplen la propiedad A, entonces cumplen la B.

Si ciertos elementos cumplen la propiedad A, entonces no cumplen la B.

Son verdaderas simultáneamente, entonces lo que he conseguido es demostrar que no hay elementos que satisfagan A. Quisiera aclarar que esto no es una prueba por vacuidad, sino por contradicción porque en vez de probar las últimas dos proposiciones, las estamos tomando por verdaderas y concluyendo que la única posibilidad de que esto se de es que no haya elementos que cumplen A.

Para finalizar presento las siguientes dos proposiciones:

Todos los que leyeron este ensayo quedaron impresionados

Todos los que leyeron este ensayo quedaron decepcionados

Esperando que no sean ambas verdaderas.