3. Semana 2

P1 **(a)** **(1)** Por álgebra lógica:

$$(\forall x)[x \in B \backslash A \Rightarrow x \in C]$$

Sea x_0 arbitrario

$$\begin{aligned}
& x_0 \in B \backslash A \Rightarrow x_0 \in C \\
\Leftrightarrow\ & x_0 \in B \cap A^c \Rightarrow x_0 \in C \\
\Leftrightarrow\ & x_0 \in B \wedge x_0 \in A^c \Rightarrow x_0 \in C \\
\Leftrightarrow\ & x_0 \notin B \vee x_0 \notin A^c \vee x_0 \in C \\
\Leftrightarrow\ & x_0 \in B^c \vee x_0 \in A \vee x_0 \in C \\
\Leftrightarrow\ & x_0 \notin C^c \vee x_0 \in B^c \vee x_0 \in A \\
\Leftrightarrow\ & x_0 \notin C^c \vee x_0 \in (B^c \cup A) \\
\Leftrightarrow\ & x_0 \in C^c \Rightarrow x_0 \in (B^c \cup A)
\end{aligned}$$

Como es para un x_0 arbitrario se concluye que $C^c \subseteq (B^c \cup A)$.

(2)

$$\begin{aligned}
& B \backslash A \subseteq C \\
\Leftrightarrow\ & C^c \subseteq (B^c \cup A) \qquad \backslash \cap D \\
\Rightarrow\ & C^c \cap D \subseteq (B^c \cup A) \cap D \\
\Leftrightarrow\ & (D \backslash C) \subseteq (B^c \cup A) \cap D \\
\Leftrightarrow\ & (D \backslash C) \subseteq (B^c \cap D) \cup (A \cap D) \\
\Leftrightarrow\ & (D \backslash C) \subseteq (B^c \cap D) \cup (A \cap D) \subseteq (B^c \cap D) \cup A \qquad \backslash X \cap D \subseteq X \text{ siempre!} \\
\Rightarrow\ & (D \backslash C) \subseteq (B^c \cap D) \cup A
\end{aligned}$$

Nota: Siempre se tiene que, dados dos conjuntos cualesquiera A y B, $A \cap B \subseteq B$ y $A \subseteq A \cup B$, demostrar esto es bastante sencillo y se hace con álgebra lógica.

Para el primer caso

$$(\forall x)[x \in B \cap A \Rightarrow x \in A]$$

Sea x_0 arbitrario

$$\begin{aligned}
& x_0 \in B \cap A \Rightarrow x_0 \in A \\
\Leftrightarrow\ & x_0 \in B \wedge x_0 \in A \Rightarrow x_0 \in A \\
\Leftrightarrow\ & x_0 \notin B \vee x_0 \notin A \vee x_0 \in A \\
\Leftrightarrow\ & V
\end{aligned}$$

Para el segundo caso

$$(\forall x)[x \in A \Rightarrow x \in A \cup B]$$

Sea x_0 arbitrario

$$\begin{aligned}
& x_0 \in A \Rightarrow x_0 \in A \cup B \\
\Leftrightarrow\ & x_0 \in A \Rightarrow x_0 \in A \vee x_0 \in B \\
\Leftrightarrow\ & x_0 \notin A \vee x_0 \in A \vee x_0 \in B \\
\Leftrightarrow & V
\end{aligned}$$

(b) $\Rightarrow$ Se sabe que $A \subseteq A \cup B$, y que $A \cap C \subseteq C$ luego usando esto y la hipótesis se tiene que:

$$A \subseteq A \cup B = A \cap C \subseteq C$$

se concluye que $A \subseteq C$ y de manera análoga $B \subseteq A$.

$\Leftarrow$ Como $B \subseteq A$, uniendo con A se tiene que $B \cup A \subseteq A \cup A$, además $A \subseteq A \cup B$, siempre, luego, uniendo ambas expresiones, se tiene la igualdad $B \cup A = A$, de manera análoga, como $A \subseteq C$, intersectando con A, se tiene que $A \cap A \subseteq C \cap A$, además $A \cap C \subseteq A$, juntando ambas expresiones se tiene que $A \cap C = A$, con esto se tiene finalmente que $A \cap C = A = B \cup A$, es decir, $A \cap C = B \cup A$.

P2

$$\begin{aligned}
& (A \triangle B) \triangle C = A \cup B \cup C \\
\Leftrightarrow\ & (A \triangle B) \triangle C = U \qquad \backslash \text{ya que } C = (A \cup B)^c \\
\Leftrightarrow\ & (A \triangle B) \triangle C = U \qquad \backslash \triangle C \\
\Rightarrow\ & (A \triangle B) \triangle (C \triangle C) = (U \triangle C) \\
\Leftrightarrow\ & (A \triangle B) \triangle \emptyset = C^c \\
\Leftrightarrow\ & A \triangle (B \triangle \emptyset) = C^c \\
\Leftrightarrow\ & A \triangle B = A \cup B \\
\Leftrightarrow\ & (A \cup B) \backslash (A \cap B) = A \cup B \\
\Leftrightarrow\ & (A \cup B) \cap (A \cap B)^c = A \cup B
\end{aligned}$$

Ahora procedemos a trabajar con esta igualdad mucho más sencilla que la original.

$\Rightarrow$ Como $A \cup B = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \subseteq (A \cap B)^c$, luego $A \cup B \subseteq (A \cap B)^c \Leftrightarrow A \cap B \subseteq (A \cup B)^c$, intersectando con A a ambos lados se tiene que

$$\begin{aligned}
& A \cap B \subseteq (A \cup B)^c \qquad \backslash \cap A \\
\Rightarrow\ & A \cap B \cap A \subseteq A^c \cap B^c \cap A \\
\Leftrightarrow\ & A \cap B \subseteq \emptyset
\end{aligned}$$

Y como $\emptyset \subseteq A \cap B$ siempre sucede se concluye que $A \cap B = \emptyset$.

$\Leftarrow$ Como $A \cap B = \emptyset$, se tiene que

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cap (A \cap B)^c &= (A \cup B) \cap (\emptyset)^c \\ &= (A \cup B) \cap U \\ &= A \cup B\end{aligned}$$

P3 Se resolverá por contrarecíproca,es decir,

$$A \neq \emptyset \Rightarrow (\exists X, Y \in P(U))(A \cup X = A \cup Y \wedge X \neq Y)$$

Al castellano, hay que encontrar dos conjuntos tales que $A \cup X = A \cup Y$ y además sean distintos entre sí. En efecto tomemos $X = A$ e $Y = \emptyset$, los cuales son distintos por hipótesis ($A \neq \emptyset$), se tiene entonces que $A \cup X = A \cup Y \Leftrightarrow A \cup A = A \cup \emptyset \Leftrightarrow A = A$, lo cual es correcto, y se concluye la demostración.

P4 **(a)** $\Rightarrow$ Se sabe por propiedad del apunte que $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$, con esto se tiene que

$$P(A) \cap P(B) = P(A \cap B) = P(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

$\Leftarrow$ Se sabe que $A \cap B \subseteq A$ y que $A \cap B \subseteq B$

$$\begin{aligned}& A \cap B \subseteq A \wedge A \cap B \subseteq B \\ \Leftrightarrow\ & A \cap B \in P(A) \wedge A \cap B \in P(B) \\ \Leftrightarrow\ & A \cap B \in P(A) \cap P(B) \\ \Rightarrow\ & A \cap B \in \{\emptyset\} \\ \Leftrightarrow\ & A \cap B \subseteq \emptyset\end{aligned}$$

Y como $\emptyset \subseteq A \cap B$ se tiene lo pedido ($A \cap B = \emptyset$).

(b) **(1)** $A \in \mathcal{F}$, luego $A \circledast A \in \mathcal{F} \Leftrightarrow A^c \cap A^c \in \mathcal{F} \Leftrightarrow A^c \in \mathcal{F}$.

(2) $A^c, B^c \in \mathcal{F}$, luego $A^c \circledast B^c \in \mathcal{F} \Rightarrow (A^c)^c \cap (B^c)^c \in \mathcal{F} \Leftrightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$.

(3) Como $(A^c \cap B^c) \in \mathcal{F}$, por (1), se tiene que $(A^c \cap B^c)^c \in \mathcal{F} \Leftrightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$.

(4) Como $(A^c \cap B^c) \in \mathcal{F}$ y $(A \cap B) \in \mathcal{F}$, se tiene que $(A^c \cap B^c) \circledast (A \cap B) \in \mathcal{F} \Leftrightarrow (A^c \cap B^c)^c \cap (A \cap B)^c \in \mathcal{F} \Leftrightarrow (A \cup B) \cap (A \cap B)^c \in \mathcal{F} \Leftrightarrow A \triangle B \in \mathcal{F}$.

(5) $A, A^c \in \mathcal{F}$, luego $A \circledast A^c \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \emptyset \in \mathcal{F}$, como $\emptyset \in \mathcal{F}$, por (1), $\emptyset^c \in \mathcal{F} \Leftrightarrow U \in \mathcal{F}$.