2. Semana 1

P1 **(a)**

$$
\begin{aligned}
& ((p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge r)) \Rightarrow ((q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r)) \\
\Leftrightarrow\ & [((p \vee q) \Rightarrow (p \wedge r)) \wedge ((p \wedge r) \Rightarrow (p \vee q))] \Rightarrow ((q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r)) \\
\Leftrightarrow\ & [((\overline{p} \wedge \overline{q}) \vee (p \wedge r)) \wedge ((\overline{p} \vee \overline{r}) \vee (p \vee q))] \Rightarrow ((q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r)) \\
\Leftrightarrow\ & [((\overline{p} \wedge \overline{q}) \vee (p \wedge r)) \wedge (\overline{p} \vee p \vee \overline{r} \vee q)] \Rightarrow ((q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r)) \\
\Leftrightarrow\ & [((\overline{p} \wedge \overline{q}) \vee (p \wedge r)) \wedge V] \Rightarrow ((q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r)) \\
\Leftrightarrow\ & ((\overline{p} \wedge \overline{q}) \vee (p \wedge r)) \Rightarrow ((q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r)) \\
\Leftrightarrow\ & ((p \vee q) \wedge (\overline{p} \vee \overline{r})) \vee ((q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r)) \\
\Leftrightarrow\ & ([(p \vee q) \wedge \overline{p}] \vee [(p \vee q) \wedge \overline{r}]) \vee ((q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r)) \\
\Leftrightarrow\ & (p \wedge \overline{p}) \vee (q \wedge \overline{p}) \vee (p \wedge \overline{r}) \vee (q \wedge \overline{r}) \vee ((\overline{q} \vee p) \wedge (\overline{p} \vee r)) \\
\Leftrightarrow\ & (p \wedge \overline{p}) \vee (q \wedge \overline{p}) \vee (p \wedge \overline{r}) \vee (q \wedge \overline{r}) \vee ([(\overline{q} \vee p) \wedge \overline{p}] \vee [(\overline{q} \vee p) \wedge r]) \\
\Leftrightarrow\ & (p \wedge \overline{p}) \vee (q \wedge \overline{p}) \vee (p \wedge \overline{r}) \vee (q \wedge \overline{r}) \vee (p \wedge \overline{p}) \vee (\overline{q} \wedge \overline{p}) \vee (\overline{q} \wedge r) \vee (p \wedge r) \\
\Leftrightarrow\ & F \vee (q \wedge \overline{p}) \vee (p \wedge \overline{r}) \vee (q \wedge \overline{r}) \vee F \vee (\overline{q} \wedge \overline{p}) \vee (\overline{q} \wedge r) \vee (p \wedge r) \\
\Leftrightarrow\ & (q \wedge \overline{p}) \vee (p \wedge \overline{r}) \vee (q \wedge \overline{r}) \vee (\overline{q} \wedge \overline{p}) \vee (\overline{q} \wedge r) \vee (p \wedge r) \\
\Leftrightarrow\ & (q \wedge \overline{p}) \vee (q \wedge \overline{r}) \vee (\overline{q} \wedge r) \vee (\overline{q} \wedge \overline{p}) \vee (p \wedge \overline{r}) \vee (p \wedge r) \\
\Leftrightarrow\ & (q \wedge \overline{p}) \vee (q \wedge \overline{r}) \vee (\overline{q} \wedge r) \vee (\overline{q} \wedge \overline{p}) \vee [p \wedge (\overline{r} \vee r)] \\
\Leftrightarrow\ & (q \wedge \overline{p}) \vee (q \wedge \overline{r}) \vee (\overline{q} \wedge r) \vee (\overline{q} \wedge \overline{p}) \vee [p \wedge V] \\
\Leftrightarrow\ & (q \wedge \overline{p}) \vee (q \wedge \overline{r}) \vee (\overline{q} \wedge r) \vee (\overline{q} \wedge \overline{p}) \vee p \\
\Leftrightarrow\ & (q \wedge \overline{p}) \vee (q \wedge \overline{r}) \vee (\overline{q} \wedge r) \vee [(\overline{q} \vee p) \wedge (\overline{p} \vee p)] \\
\Leftrightarrow\ & (q \wedge \overline{p}) \vee (q \wedge \overline{r}) \vee (\overline{q} \wedge r) \vee [(\overline{q} \vee p) \wedge V] \\
\Leftrightarrow\ & (q \wedge \overline{p}) \vee (q \wedge \overline{r}) \vee (\overline{q} \wedge r) \vee (\overline{q} \vee p) \\
\Leftrightarrow\ & (q \wedge \overline{p}) \vee (\overline{q} \vee p) \vee (q \wedge \overline{r}) \vee (\overline{q} \wedge r) \\
\Leftrightarrow\ & \overline{(\overline{q} \vee p)} \vee (\overline{q} \vee p) \vee (q \wedge \overline{r}) \vee (\overline{q} \wedge r) \\
\Leftrightarrow\ & V \vee (q \wedge \overline{r}) \vee (\overline{q} \wedge r) \\
\Leftrightarrow\ & V
\end{aligned}
$$

Como habrán notado, este método a veces puede resultar poco eficiente, ahora se verán otros que para ciertas situaciones es mucho más rápido. Lo que está a la izquierda de la implicancia se llama hipótesis $((p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge r))$, y es la información que uno tiene a disposición y se sabe que es verdadera, recuerden que la implicancia es una consecuencia o algo que se quiere deducir a partir de la hipótesis, para futuras demostraciones siempre se utilizará esto para llegar a demostrar que es verdadero el resultado final (parte derecha de la implicancia). Ahora aplicaremos, sabiendo esto, este método en el mismo problema, es decir, desde la izquierda llegar a la derecha mediante tautologías o propiedades.

$$\begin{aligned}
&((p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge r))\\
\Leftrightarrow\ &[((p \vee q) \Rightarrow (p \wedge r)) \wedge ((p \wedge r) \Rightarrow (p \vee q))\\
\Leftrightarrow\ &((\overline{p} \wedge \overline{q}) \vee (p \wedge r)) \wedge ((\overline{p} \vee \overline{r}) \vee (p \vee q))\\
\Leftrightarrow\ &((\overline{p} \wedge \overline{q}) \vee (p \wedge r)) \wedge (\overline{p} \vee p \vee \overline{r} \vee q)\\
\Leftrightarrow\ &((\overline{p} \wedge \overline{q}) \vee (p \wedge r)) \wedge V\\
\Leftrightarrow\ &(\overline{p} \wedge \overline{q}) \vee (p \wedge r)\\
\Leftrightarrow\ &((\overline{p} \wedge \overline{q}) \vee p) \wedge ((\overline{p} \wedge \overline{q}) \vee r)\\
\Leftrightarrow\ &(\overline{p} \vee p) \wedge (\overline{q} \vee p) \wedge (\overline{p} \vee r) \wedge (\overline{q} \vee r)\\
\Leftrightarrow\ &V \wedge (\overline{q} \vee p) \wedge (\overline{p} \vee r) \wedge (\overline{q} \vee r)\\
\Leftrightarrow\ &(\overline{q} \vee p) \wedge (\overline{p} \vee r) \wedge (\overline{q} \vee r)\\
\Rightarrow\ &(\overline{q} \vee p) \wedge (\overline{p} \vee r)\\
\Leftrightarrow\ &(q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r)
\end{aligned}$$

Fijarse que efectivamente a partir de la izquierda se llegó a la derecha, y se utilizaron equivalencias y una tautología conocida $((p \wedge q) \Rightarrow q)$, cuando se tienen varias proposiciones unidas con el colectivo lógico $\wedge$, implica en particular al menos una de ellas, por ejemplo, $((p \wedge q \wedge r \wedge m \wedge s) \Rightarrow r)$, es fácil demostrarla ya que $((p \wedge q) \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\overline{(p \wedge q)} \vee q) \Leftrightarrow (\overline{p} \vee \overline{q} \vee q) \Leftrightarrow \overline{p} \vee V \Leftrightarrow V$, notar que al revés no es cierto, es decir, p no implica $p \wedge q$ y por eso que es una implicancia y no una equivalencia. Debido a esto que se nos pide demostrar $((p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge r)) \Rightarrow ((q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r))$ y no $((p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge r)) \Leftrightarrow ((q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r))$ ya que al revés no ocurre.

Existe otra forma de resolver el problema y es tomando la parte derecha de la implicancia, trabajar con ella un poco y en algún momento del desarrollo utilizar la hipótesis para llegar a que efectivamente es una tautología, aplicaremos este método en el mismo problema.

$$\begin{aligned}
&(q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow r)\\
\Leftrightarrow\ &(\overline{q} \vee p) \wedge (\overline{p} \vee r)\\
\Leftrightarrow\ &((\overline{q} \vee p) \wedge \overline{p}) \vee ((\overline{q} \vee p) \wedge r)\\
\Leftrightarrow\ &(\overline{q} \wedge \overline{p}) \vee (p \wedge \overline{p}) \vee (\overline{q} \wedge r) \vee (p \wedge r)\\
\Leftrightarrow\ &(\overline{q} \wedge \overline{p}) \vee F \vee (\overline{q} \wedge r) \vee (p \wedge r)\\
\Leftrightarrow\ &(\overline{q} \wedge \overline{p}) \vee (\overline{q} \wedge r) \vee (p \wedge r)\\
\Leftrightarrow\ &\overline{(p \vee q)} \vee (\overline{q} \wedge r) \vee (p \wedge r)\\
\Leftrightarrow\ &\overline{(p \wedge r)} \vee (\overline{q} \wedge r) \vee (p \wedge r) \qquad \backslash\text{aquí se utilizó la hipótesis } ((p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge r))\\
\Leftrightarrow\ &\overline{(p \wedge r)} \vee (p \wedge r) \vee (\overline{q} \wedge r)\\
\Leftrightarrow\ &V
\end{aligned}$$

Como se pudo apreciar, en un momento se utiliza la hipótesis, que es verdadera, para realizar el cambio oportuno y resolver el problema, debido a que $((p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge r))$ es una equivalencia, el cambio también se hizo mediante una equivalencia, y se llegó a una tautología tal cual se quería demostrar.

Todos estos métodos son válidos y ninguno es mejor que otro, dependerá exclusivamente del problema, existe un cuarto método que es por inspección o contradicción, muy utilizado cuando se tienen implicancias, se resolvió de esa manera en el ejemplo (d) y sugiero revisarlo.

(b)

$$\begin{aligned}
&[(p \Rightarrow \overline{q}) \wedge (r \Rightarrow q)] \\
\Leftrightarrow\ &[(p \Rightarrow \overline{q}) \wedge (\overline{q} \Rightarrow \overline{r})] \\
\Rightarrow\ &[(p \Rightarrow \overline{r})] \qquad \backslash\text{transitividad}
\end{aligned}$$

Este método lo que hizo fue tomar la parte de la izquierda de la implicancia del problema $[(p \Rightarrow \overline{q}) \wedge (r \Rightarrow q)]$ y llegar, mediante propiedades y tautologías, a la parte derecha de la implicancia $[(p \Rightarrow \overline{r})]$, se utilizó especificamente la transitividad en proposiciones.

(c)

$$\begin{aligned}
&(p \Rightarrow q) \Rightarrow [\overline{(q \wedge r)} \Rightarrow \overline{(p \wedge r)}] \\
\Leftrightarrow\ &(\overline{p} \vee q) \Rightarrow [\overline{(q \wedge r)} \Rightarrow \overline{(p \wedge r)}] \\
\Leftrightarrow\ &(p \wedge \overline{q}) \vee [\overline{(q \wedge r)} \Rightarrow \overline{(p \wedge r)}] \\
\Leftrightarrow\ &(p \wedge \overline{q}) \vee (q \wedge r) \vee \overline{(p \wedge r)} \\
\Leftrightarrow\ &(p \wedge \overline{q}) \vee (q \wedge r) \vee \overline{p} \vee \overline{r} \\
\Leftrightarrow\ &(p \wedge \overline{q}) \vee \overline{p} \vee (q \wedge r) \vee \overline{r} \\
\Leftrightarrow\ &[(p \vee \overline{p}) \wedge (\overline{q} \vee \overline{p})] \vee [(q \vee \overline{r}) \wedge (r \vee \overline{r})] \\
\Leftrightarrow\ &[V \wedge (\overline{q} \vee \overline{p})] \vee [(q \vee \overline{r}) \wedge V] \\
\Leftrightarrow\ &\overline{q} \vee \overline{p} \vee q \vee \overline{r} \\
\Leftrightarrow\ &V
\end{aligned}$$

(d) Supongamos que no es tautología, como nos piden demostrar que sí lo es, deberíamos llegar a una contradicción, en efecto, si suponemos que no es tautología quiere decir que existe un caso en el cual la expresión

$$\underbrace{[(p \Rightarrow \overline{q}) \wedge (\overline{r} \vee q) \wedge r]}_{1} \Rightarrow \underbrace{\overline{p}}_{2}$$

Es falsa, esto solamente se puede dar si 1 es verdadera y 2 es falsa, con esto necesariamente p es verdadero, luego para que 1 sea verdadero $(p \Rightarrow \overline{q})$, $(\overline{r} \vee q)$ y r deben serlo. Dado que $\overline{r}$ es falso, solamente queda que q, sea verdadero $(\overline{r} \vee q)$, pero como p es verdadero, necesitamos que $\overline{q}$ también lo sea $(p \Rightarrow \overline{q})$, es decir, que q sea falso, con lo cual hemos llegado a la contradicción ya que q tiene que ser verdadero y falso a la vez para que no sea tautología, como esto no sucede, lo que se supuso al principio no era correcto y, por lo tanto, sí estamos en presencia de una tautología.

P2 **(a)** Como $p \Rightarrow q$ es falsa, necesariamente p es verdadero y q es falso, luego la expresión queda como sigue

$$\begin{aligned}
& p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge q \\
\Leftrightarrow\ & V \vee (F \wedge r) \Leftrightarrow (V \vee r) \wedge F \\
\Leftrightarrow\ & (V \vee F) \Leftrightarrow (V \wedge F) \\
\Leftrightarrow\ & V \Leftrightarrow F \\
\Leftrightarrow\ & F
\end{aligned}$$

Por lo tanto esa equivalencia no puede ser verdadera.

(b)

$$\underbrace{[s \Rightarrow (r \vee \overline{r})]}_{1} \Rightarrow \underbrace{[\overline{(p \Rightarrow q)} \wedge s \wedge \overline{r}]}_{2}$$

Notemos que 1 siempre es verdadero ya que $(r \vee \overline{r})$ lo es, esto obliga a que 2 también lo sea, con esto presente, s es verdadero, r es falso y $\overline{(p \Rightarrow q)} \Leftrightarrow (p \wedge \overline{q})$ es verdadero, finalmente, p es verdadero y q es falso.

(c) Primero procedemos a trabajar un poco la expresión.

$$\begin{aligned}
& [(p \wedge r) \vee (q \Rightarrow s)] \Rightarrow [p \vee (r \wedge s)] \\
\Leftrightarrow\ & [(p \wedge r) \vee (\overline{q} \vee s)] \Rightarrow [p \vee (r \wedge s)] \\
\Leftrightarrow\ & [(p \wedge r) \vee (F \vee s)] \Rightarrow [p \vee (r \wedge s)] \\
\Leftrightarrow\ & [(p \wedge r) \vee s] \Rightarrow [p \vee (r \wedge s)] \\
\Leftrightarrow\ & [(\overline{p} \vee \overline{r}) \wedge \overline{s}] \vee p \vee (r \wedge s)
\end{aligned}$$

Se realizó el cambio correspondiente de $q \Leftrightarrow V$ por hipótesis de enunciado, además $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \wedge V) \Leftrightarrow p$ no es equivalente con $s \Leftrightarrow r$, con esto lo mejor es separarlo por casos:

1) p es verdadero

$$\begin{aligned}
& [(\overline{p} \vee \overline{r}) \wedge \overline{s}] \vee p \vee (r \wedge s) \\
\Leftrightarrow\ & [(F \vee \overline{r}) \wedge \overline{s}] \vee V \vee (r \wedge s) \\
\Leftrightarrow\ & V
\end{aligned}$$

2) p es falso, como no es equivalente con $s \Leftrightarrow r$, significa que $s \Leftrightarrow r$ es verdadero, con esto tenemos nuevamente 2 casos

 2.1) r, s son verdaderos

$$\begin{aligned} & [(\overline{p} \vee \overline{r}) \wedge \overline{s}] \vee p \vee (r \wedge s) \\ \Leftrightarrow\ & [(V \vee F) \wedge F] \vee F \vee (V \wedge V) \\ \Leftrightarrow\ & V \end{aligned}$$

 2.2) r, s son falsos

$$\begin{aligned} & [(\overline{p} \vee \overline{r}) \wedge \overline{s}] \vee p \vee (r \wedge s) \\ \Leftrightarrow\ & [(V \vee V) \wedge V] \vee F \vee (F \wedge F) \\ \Leftrightarrow\ & V \end{aligned}$$

Con lo que se concluye que es una tautología

P3 **(a)** $\overline{r} \Leftrightarrow \overline{(\forall x)(p(x) \Rightarrow q)} \Leftrightarrow (\exists x)\overline{(p(x) \Rightarrow q)} \Leftrightarrow (\exists x)\overline{(\overline{p(x)} \vee q)} \Leftrightarrow (\exists x)(p(x) \wedge \overline{q})$
$\overline{s} \Leftrightarrow \overline{((\forall x)p(x)) \Rightarrow q} \Leftrightarrow \overline{\overline{((\forall x)p(x))} \vee q} \Leftrightarrow ((\forall x)p(x)) \wedge \overline{q}$

(b) Al ver las negaciones, se puede observar que $(\overline{s} \Rightarrow \overline{r}) \Leftrightarrow (r \Rightarrow s)$, en efecto, si se toma un x_0 arbitrario que cumple $p(x_0)$ y se tiene $\overline{q}$ entonces en particular se tiene al menos un elemento (x_0) que cumple $p(x_0)$ y $\overline{q}$, es decir, $(\exists x)(p(x) \wedge \overline{q})$. Ahora veamos que no se cumple $(s \Rightarrow r)$, para esto lo mejor es ver un ejemplo:

- $q \Leftrightarrow$ hoy es 30 de febrero
- $p(x) \Leftrightarrow x$ es jugador de fútbol

La proposición s, es siempre verdadera, en efecto, $((\forall x)p(x))$ es falso ya que no todas las personas del planeta juegan fútbol (estamos tomando el conjunto universo) y q claramente es falso, luego $s \Leftrightarrow (F \Rightarrow F) \Leftrightarrow V$. Sin embargo r es falso ya que acá nos interesan solamente los x tales que jueguen fútbol, por ejemplo, Alexis Sánchez, sin embargo, q es falso, luego $r \Leftrightarrow F$, como no es cierto para todos los casos entonces s no implica r.