Clase Auxiliar N°2

MA1002-3 Profesor: Jaime Ortega. Auxiliar: Anton Svensson.

23 de marzo de 2016

P1 (Función Inversa) Sea $I = (0, \infty)$ y $f : I \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x + \ln(x)$ para $x \in I$.

- Pruebe que f es continua y estrictamente creciente.
- Determine $J := f(I)$ (el conjunto imagen).
- Explique por qué f es invertible. ¿Es $f^{-1} : J \to I$ continua?

P2 (Continuidad uniforme) Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se llama Lipchitz si $\exists L > 0$, tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

a) Demostrar que toda función Lipchitz es uniformemente continua.

b) Probar que la función $f(x) = x^2$ es uniformemente continua en $[0, 1]$, pero no en $\mathbb{R}$.

c) Probar que la función $f(x) = \frac{1}{x}$ no es uniformemente continua en $(0, 2]$.

d) Mostrar que no toda función uniformemente continua es Lipchitz. (Indicación: Considere la función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$).

P3 Una partícula con cierta masa está conectada a un resorte en presencia de una fuerza de roce, que es proporcional a la velocidad de la partícula. La ecuación diferencial que representa este problema es:

$$mx''(t) = -kx(t) - \lambda x'(t), \ t \geq 0 \tag{$\star$}$$

Definiendo las constantes $\omega_0^2 := \frac{k}{m}$, $2\gamma := \frac{\lambda}{m}$, y $\omega \geq 0$ tal que $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$, entonces una solución de dicha ecuación diferencial es:

$$\tilde{x}(t) = e^{-\gamma t} \sin(\omega t)$$

a) Calcular la primera y segunda derivada de $\tilde{x}$.

b) Probar que $\tilde{x}$ es efectivamente una solución de la ecuación diferencial ($\star$).