

Pauta Guía Problemas: Semana 7

Profesor: Jorge San Martín H.

Auxiliares: Gianfranco Liberona, Nikolas Tapia

P1. Resolver la ecuación trigonométrica:

$$\sin 2x = \cos \frac{x}{2}.$$

Graficar las soluciones en el círculo geométrico y determinar si $\frac{3\pi}{5}$ es solución.

Solución

Primero recordemos que $\sin \alpha = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$, entonces

$$\begin{aligned} \sin 2x = \cos \frac{x}{2} &\Leftrightarrow \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) = \cos \frac{x}{2} \\ &\Leftrightarrow \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) - \cos \frac{x}{2} = 0. \end{aligned}$$

Ahora, veamos que $\cos x - \cos y$ se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \cos x - \cos y &= \cos \left(\left(\frac{x+y}{2} \right) + \left(\frac{x-y}{2} \right) \right) - \cos \left(\left(\frac{x+y}{2} \right) - \left(\frac{x-y}{2} \right) \right) \\ &= -2 \sin \left(\frac{x+y}{2} \right) \sin \left(\frac{x-y}{2} \right) \end{aligned}$$

Donde la última expresión, se obtiene después de aplicar las fórmulas ya conocidas para calcular el coseno de sumas y restas de ángulos, según corresponda.

Con esto, volvemos al problema, y reescribimos:

$$\begin{aligned} \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) - \cos \frac{x}{2} = 0 &\Leftrightarrow -2 \sin \left(\frac{\frac{\pi}{2} - 2x + \frac{x}{2}}{2} \right) \sin \left(\frac{\frac{\pi}{2} - 2x - \frac{x}{2}}{2} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \underbrace{\sin \left(\frac{\pi - 3x}{4} \right)}_{(1)} \underbrace{\sin \left(\frac{\pi - 5x}{4} \right)}_{(2)} = 0. \end{aligned}$$

Lo que vale si y sólo si $(1) = 0 \vee (2) = 0$. Resolviendo las ecuaciones por separado tenemos

$$\begin{aligned} (1) = 0 &\Leftrightarrow \sin \left(\frac{\pi - 3x}{4} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi - 3x}{4} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \frac{3x}{4} = \frac{\pi}{4} - k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi(1 - 4k)}{3}. \end{aligned}$$

y para (2)

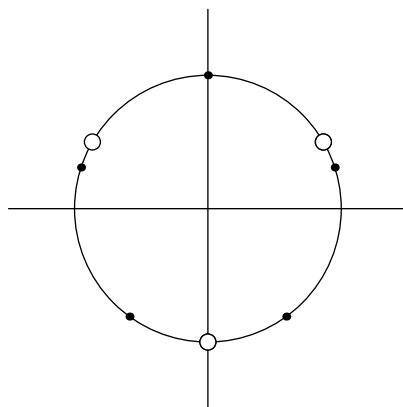
$$\begin{aligned} (2) = 0 &\Leftrightarrow \sin \left(\frac{\pi - 5x}{4} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\pi - 5x}{4} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \frac{5x}{4} = \frac{\pi}{4} - k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi(1 - 4k)}{5}. \end{aligned}$$

Para ver si $\frac{3\pi}{5}$ es solución, debemos encontrar, en las soluciones de (2), un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\frac{\pi(1-4k)}{5} \equiv_{4\pi} \frac{3\pi}{5}$. Esto equivale a encontrar $k, \ell \in \mathbb{Z}$ tal que $\frac{\pi(1-4k)}{5} = \frac{3\pi}{5} + 4\ell\pi$. Esto pues la función $\sin 2x - \cos \frac{x}{2}$ es 4π -periódica. Resolvamos

$$\begin{aligned}\frac{3\pi}{5} - \frac{\pi(1-4k)}{5} &= \frac{3\pi}{5} + 4\ell\pi \Leftrightarrow 3 - 1 + 4k = 20\ell \\ &\Leftrightarrow 2 + 4k = 20\ell \\ &\Leftrightarrow 1 + 2k = 10\ell\end{aligned}$$

Lo que es imposible. Concluimos que $\frac{3\pi}{5}$ no es solución.

Para graficar las soluciones, notemos que como la función es 4π -periódica, entonces en el círculo unitario veremos aparentemente soluciones que no lo son, por ejemplo $\frac{3\pi}{5}$, pues $\frac{3\pi}{5} \equiv_{2\pi} \frac{-7\pi}{5}$ y sabemos que $\frac{-7\pi}{5}$ es solución. Entonces lo que haremos será hacer el cambio $x = 2\alpha$ (para obtener una función 2π -periódica y graficaremos para α).



P2. (a) Demostrar que $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$.

Solución

Primero notemos que, sumando un cero adecuado, tenemos

$$\alpha = \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) + \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right), \quad \beta = \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) - \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right).$$

Entonces

$$\cos \alpha + \cos \beta = \cos \left[\left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) + \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \right] + \cos \left[\left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) - \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \right]$$

Recordemos ahora que $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}\cos \alpha + \cos \beta &= \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \cancel{\sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)} \\ &\quad + \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \cancel{\sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)} \\ &= 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right).\end{aligned}$$

(b) Utilizar lo anterior para resolver la ecuación $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$.

Solución

Notemos que $\cos 0 = 1$, entonces reemplazando obtenemos

$$\begin{aligned}\cos 2x + 1 + \overbrace{\cos 3x + \cos x}^{(a)} &= 0 \Leftrightarrow \overbrace{\cos x + \cos 0}^{(a)} + 2 \cos 2x \cos x = 0 \\ &\Leftrightarrow 2 \cos^2 x + 2 \cos 2x \cos x = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos x \overbrace{(\cos 2x + \cos x)}^{(a)} = 0 \\ &\Leftrightarrow 2 \underbrace{\cos x}_{(1)} \underbrace{\cos \frac{3x}{2}}_{(2)} \underbrace{\cos \frac{x}{2}}_{(3)} = 0.\end{aligned}$$

Ahora tenemos 3 ecuaciones para x : $(1) = 0$, $(2) = 0$, $(3) = 0$. Resolviendo por separado:

- $(1)=0$:

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = 2k\pi.$$

- $(2)=0$:

$$\begin{aligned}\cos \frac{3x}{2} = 0 &\Leftrightarrow \frac{3x}{2} = 2k\pi \\ &\Leftrightarrow x = \frac{4k\pi}{3}.\end{aligned}$$

- $(3)=0$:

$$\begin{aligned}\cos \frac{x}{2} = 0 &\Leftrightarrow \frac{x}{2} = 2k\pi \\ &\Leftrightarrow x = 4k\pi.\end{aligned}$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

P3. Resolver la ecuación

$$\sqrt{3} \cos x + \sin x = 1.$$

Solución

Un camino posible para solucionar el problema, es aplicar un método visto en cátedra, haciendo el cambio de variables $a = \cos x$, $b = \sin x$, y resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}a\sqrt{3} + b &= 1 \\ a^2 + b^2 &= 1\end{aligned}$$

Donde la última expresión, nace del hecho de que $(\cos x, \sin x)$ es un punto perteneciente a la circunferencia unitaria. A continuación, mostraremos otra solución, un poco más "elegante", notando que si multiplicamos la igualdad por $\frac{1}{2}$ obtenemos que

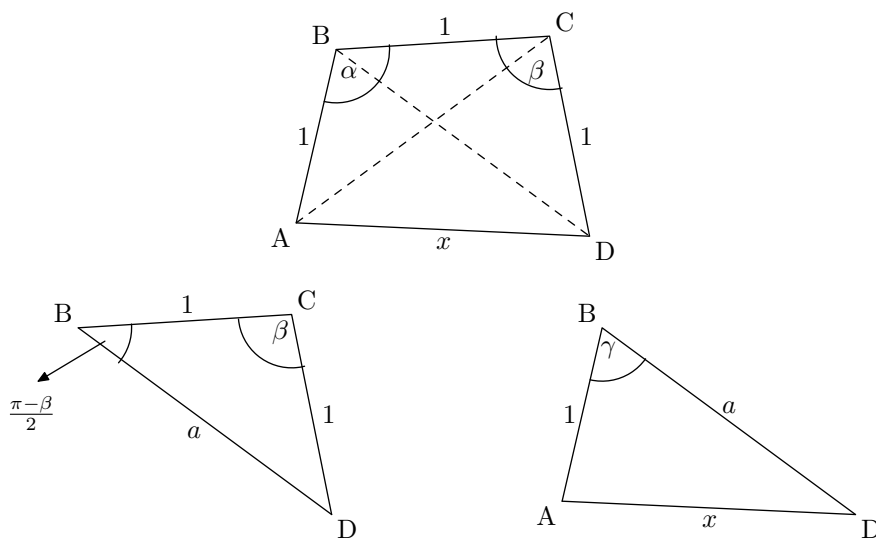
$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x = \frac{1}{2}.$$

Recordemos que $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y que $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Entonces

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{3} \cos x + \cos \frac{\pi}{3} \sin x = \frac{1}{2}.$$

Y aplicando la fórmula $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$ tenemos

$$\begin{aligned}\sin \left(\frac{\pi}{3} + x \right) &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = k\pi + (-1)^k \overbrace{\arcsen \frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \\ &\Leftrightarrow x = \left(k - \frac{1}{3} \right) \pi + (-1)^k \frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$



P4. En un cuadrilátero $ABCD$, conocemos los ángulos ABC , BCD , α y β respectivamente. Además se sabe que la longitud de los lados AB , BC y CD es 1.

Probar que la longitud del lado DA es igual a $\sqrt{3 - 2\cos\alpha - 2\cos\beta + 2\cos(\alpha + \beta)}$.

Solución

Tenemos la siguiente situación.

Consideremos los triángulos BCD y ABD .

En primer lugar, notemos que en el triángulo ABD , tenemos la relación $\gamma + \frac{\pi - \beta}{2} = \alpha$. Luego, usando el Teorema del Coseno en el triángulo BCD , tenemos que

$$\begin{aligned} 1 &= 1 + a^2 - 2a \cos\left(\frac{\pi - \beta}{2}\right) \Leftrightarrow 0 = a^2 - 2a \sin\frac{\beta}{2} \\ &\Leftrightarrow 0 = a \left(a - 2 \sin\frac{\beta}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow a = 0 \vee a = 2 \sin\frac{\beta}{2}. \end{aligned}$$

Descartamos el caso $a=0$, pues no presenta interés para el problema.

Haciendo lo análogo en el triángulo ABD

$$\begin{aligned} x^2 &= 1 + 4 \sin^2\frac{\beta}{2} - 4 \sin\frac{\beta}{2} \sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) = 1 + 2(1 - \cos\beta) - 4 \sin\frac{\beta}{2} \sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) \\ &= 1 + 2(1 - \cos\beta) - 4 \sin\frac{\beta}{2} \sin\left(\frac{2\alpha + \beta}{2}\right). \end{aligned}$$

En el problema **P1.** demostramos que $\cos x - \cos y = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$, entonces tenemos la siguiente identidad

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos\alpha = -2 \sin\left(\frac{2\alpha + \beta}{2}\right) \sin\frac{\beta}{2}.$$

y entonces obtenemos que

$$\begin{aligned} x^2 &= 1 + 2(1 - \cos\beta) + 2(\cos(\alpha + \beta) - \cos\alpha) \Leftrightarrow x^2 = 3 - 2\cos\beta - 2\cos\alpha + 2\cos(\alpha + \beta) \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{3 - 2\cos\beta - 2\cos\alpha + 2\cos(\alpha + \beta)}. \end{aligned}$$

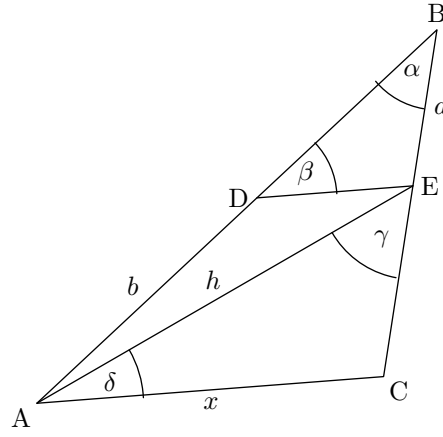
P5. Considere la siguiente figura

(a) Encontrar d en términos de α , β y a .

Solución

Usando el Teorema del Seno en el triángulo DEB :

$$\frac{\sin\beta}{a} = \frac{\sin\alpha}{d} \Leftrightarrow d = a \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$



- (b) Encontrar h en términos de α , β , b y d .

Solución

Usando el Teorema del Coseno en el triángulo ADE :

$$h^2 = d^2 + b^2 - 2bd \cos(\pi - \beta) \Rightarrow h = \sqrt{a^2 \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \beta} + b^2 + 2ab \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cos \beta}$$

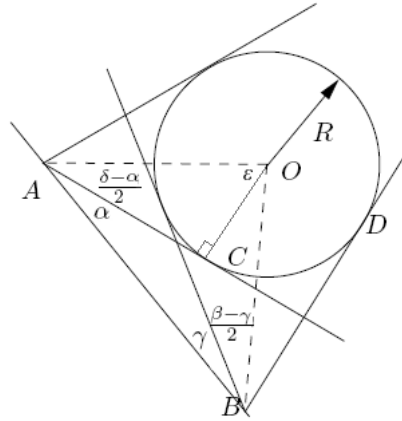
- (c) Determinar el valor de x .

Solución

Usando el Teorema del Seno en el triángulo ACE :

$$\frac{\sin(\pi - \delta - \gamma)}{h} = \frac{\sin \gamma}{x} \Leftrightarrow \frac{\sin(\delta + \gamma)}{h} = \frac{\sin \gamma}{x} \\ \Leftrightarrow x = h \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin(\delta + \gamma)}$$

- P6.** Se quiere medir el radio R de un estadio de forma circular, para lo cual se dispone de la distancia L entre los puntos A y B y los ángulos α , β , γ , δ entre las rectas tangentes a la circunferencia que pasan por A y B y el trazo \overline{AB} , como se muestra en la figura. Expresa R en términos de $L = \overline{AB}$ y α , β , γ , δ .



Solución

Como el triángulo ACO es recto, tenemos, por definición, que

$$\sin\left(\frac{\delta - \alpha}{2}\right) = \frac{R}{\overline{OA}}$$

Luego, podemos calcular \overline{OA} como sigue:

Si nos fijamos en el triángulo AOB , observamos que

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \pi - \left(\alpha - \frac{\delta - \alpha}{2} + \gamma - \frac{\beta - \gamma}{2} \right) \\ &= \pi - \left(\frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2} \right).\end{aligned}$$

Y luego usando el Teorema del Seno en el triángulo AOB

$$\begin{aligned}\frac{\sin\left(\pi - \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2}\right)}{L} &= \frac{\sin\left(\frac{\beta + \gamma}{2}\right)}{\overline{OA}} \\ \Leftrightarrow \overline{OA} &= \frac{L \cdot \sin\left(\frac{\beta + \gamma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2}\right)}\end{aligned}$$

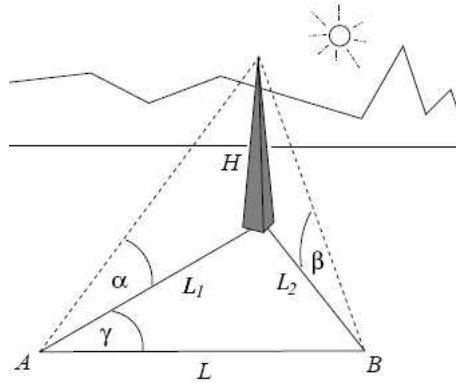
Y por lo tanto

$$R = \overline{OA} \cdot \sin\left(\frac{\delta - \alpha}{2}\right) = \frac{L \cdot \sin\left(\frac{\beta + \gamma}{2}\right) \sin\left(\frac{\delta - \alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{2}\right)}.$$

P7. La altura H de la torre de la figura es desconocida. Se conocen los ángulos de elevación α y β medidos desde dos puntos A y B del suelo, separados por una distancia $L > 0$ y formando con la base de la torre un ángulo γ . Sabiendo que la torre es vertical respecto del suelo, calcule H en términos de L , α , β , γ en los casos $\alpha > \beta$, $\alpha = \beta$ y $\alpha < \beta$.

(Nota: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, $-\pi < \gamma < \pi$).

Solución



Directamente de la figura tenemos que

$$L_1 = \frac{H}{\operatorname{tg} \alpha}, \quad L_2 = \frac{H}{\operatorname{tg} \beta}$$

Luego, del Teorema del Coseno tenemos que

$$\begin{aligned}L_2^2 &= L_1^2 + L^2 - 2LL_1 \cos \gamma \Leftrightarrow \frac{H^2}{\operatorname{tg}^2 \beta} = \frac{H^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + L^2 - 2 \frac{LH \cos \gamma}{\operatorname{tg} \alpha} \\ &\Leftrightarrow H^2(\cotg^2 \beta - \cotg^2 \alpha) + 2LH \cotg \alpha \cos \gamma - L^2 = 0\end{aligned}$$

Aquí, si imponemos $\alpha = \beta$, obtenemos un valor para H dado por

$$H = \frac{L \operatorname{tg} \alpha}{2 \cos \gamma}$$

Supongamos ahora que $\alpha \neq \beta$, entonces resolviendo la cuadrática para H

$$H = \frac{-2L \cotg \alpha \cos \beta \pm \sqrt{4L^2 \cotg^2 \alpha \cos^2 \beta + 4(\cotg^2 \beta - \cotg^2 \alpha)L^2}}{2(\cotg^2 \beta - \cotg^2 \alpha)}$$

Notemos que dependiendo del signo de $\cotg^2 \beta - \cotg^2 \alpha$ tenemos dos casos, pues solo nos interesa una solución positiva.

- Caso 1 ($\alpha < \beta$): Aquí tenemos que $\operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \beta \Rightarrow \cotg^2 \alpha > \cotg^2 \beta$ y entonces nos quedamos con la solución

$$H = \frac{-2L \cotg \alpha \cos \beta - \sqrt{4L^2 \cotg^2 \alpha \cos^2 \beta + 4(\cotg^2 \beta - \cotg^2 \alpha)L^2}}{2(\cotg^2 \beta - \cotg^2 \alpha)}$$

por ser positiva.

- Caso 2 ($\alpha > \beta$): Análogamente al caso anterior, nos quedamos con la solución

$$H = \frac{-2L \cotg \alpha \cos \beta + \sqrt{4L^2 \cotg^2 \alpha \cos^2 \beta + 4(\cotg^2 \beta - \cotg^2 \alpha)L^2}}{2(\cotg^2 \beta - \cotg^2 \alpha)}$$

por ser positiva.