

## Pauta Guía Problemas: Semana 6

Profesor: Jorge San Martín H.  
 Auxiliares: Gianfranco Liberona, Nikolas Tapia

**P1.** Considere la función

$$f(x) = \frac{1 + \sin x}{1 - \cos x}$$

Encuentre dominio, signos, ceros, paridad, periodicidad e inyectividad.

**Solución**

- (a) **Dominio:** Para encontrar el dominio, notamos que en los únicos puntos en donde puede haber problemas, son en los que el denominador se anula. Para buscarlos, debemos resolver la ecuación  $1 - \cos x = 0$ . Entonces

$$\begin{aligned} 1 - \cos x = 0 &\Leftrightarrow \cos x = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Concluimos que el dominio  $f$  es el conjunto  $A = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$ .

- (b) **Signos:** Notemos que dado que  $\forall x \in \mathbb{R}$   $\sin x \in [-1, 1]$  y  $\cos x \in [-1, 1]$ , tenemos que  $1 + \sin x \in [0, 2]$  y que  $1 - \cos x \in [0, 2]$ . Luego,  $f$  es no negativa, por ser cociente de funciones no negativas.
- (c) **Ceros:** Necesitamos encontrar todos los valores de  $x \in \mathbb{R}$  tales que  $f(x) = 0$ . Para ello, debemos resolver la ecuación en  $A$

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{1 + \sin x}{1 - \cos x} = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 + \sin x = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin x = -1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

En consecuencia los ceros de  $f$  son  $Z = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$ .

- (d) **Paridad:** Afirmamos que  $f$  no es par ni impar. En efecto, aunque el dominio es simétrico, sus ceros no lo son (p.ej.  $\frac{3\pi}{2}$  es un cero pero  $-\frac{3\pi}{2}$  no lo es). Luego,  $\forall x \in Z \quad \pm f(x) = 0 \neq f(-x)$ .
- (e) **Periodicidad:** Vemos que  $f$  debe ser al menos  $2\pi$ -periódica, pues es cociente de funciones  $2\pi$ -periódicas. Recordemos que la definición de periodo es el menor  $p \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x + p) = f(x)$ . Veamos que no hay  $p < 2\pi$  que cumpla lo anterior. Razonemos por contradicción:  
 Supongamos que  $f$  tiene periodo  $p \in (0, 2\pi)$ . Luego, para cualquier  $x \in A$  debe cumplirse que  $f(x + p) = f(x)$ , en particular para  $x = \frac{3\pi}{2}$ . Pero si resolvemos la ecuación para  $p$  obtenemos

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3\pi}{2} + p\right) = f\left(\frac{3\pi}{2}\right) &\Leftrightarrow \frac{1 + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + p\right)}{1 - \cos\left(\frac{3\pi}{2} + p\right)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \sin\left(\frac{3\pi}{2} + p\right) = -1 \\ &\Leftrightarrow \frac{3\pi}{2} + p = \frac{3\pi}{2} \quad (*) \\ &\Leftrightarrow p = 0 \end{aligned}$$

Contradicción, pues supusimos que  $0 < p$ . Luego, concluimos que  $f$  es  $2\pi$ -periódica.

*Nota (\*): Aquí descartamos las soluciones de la forma  $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ , pues sólo necesitamos soluciones  $p < 2\pi$ .*

- (f) **Inyectividad:** Notamos que  $f$  no es inyectiva pues  $\forall x \in A$ ,  $f(x + p) = f(x)$ .

*Nota: Toda función periódica, en donde el dominio contenga a  $x$  y a  $x + p$  (por lo menos), es no inyectiva.*

**P2. (a)** Encuentre los ceros de la función:  $f(x) = \cos^3(x) + \sin^3(x) - 1 + \frac{1}{2} \sin(2x)$ .

**Indicación:**  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ .

**Solución**

Vemos que la indicación no sirve mucho como viene, trabajemosla un momento entonces. Notemos que si cambiamos  $b$  por  $-b$  obtenemos que

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \quad (\bullet)$$

y entonces ahora sí podemos aplicar la fórmula a la ecuación. Obtenemos entonces

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow \cos^3(x) + \sin^3(x) - 1 + \frac{1}{2} \sin(2x) = 0 \\ &\stackrel{(\bullet)}{\Leftrightarrow} (\cos x + \sin x)(\cos^2 x - \cos x \sin x + \sin^2 x) - 1 + \frac{1}{2} \sin(2x) = 0 \end{aligned}$$

Recordando que  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  y que  $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(\cos^2 x - \cos x \sin x + \sin^2 x) - \sin^2 x - \cos^2 x + \sin x \cos x = 0 \\ &\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(\cos^2 x - \cos x \sin x + \sin^2 x) - (\cos^2 x - \cos x \sin x + \sin^2 x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \underbrace{(\cos x + \sin x - 1)}_{(1)} \underbrace{(\cos^2 x - \cos x \sin x + \sin^2 x)}_{(2)} = 0 \end{aligned}$$

Como sabemos que  $x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$ , obtenemos dos ecuaciones. Resolviendo (1)=0:

$$\cos x + \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x + \sin x = 1$$

Notemos que esta ecuación sólo tiene solución cuando  $\cos x = 1 \wedge \sin x = 0 \Rightarrow x = 2k\pi$  o  $\sin x = 1 \wedge \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ . Así, determinamos un conjunto solución  $Z_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$ . Resolvamos ahora (2)=0:

$$\begin{aligned} \cos^2 x - \cos x \sin x + \sin^2 x &\Leftrightarrow 1 - \cos x \sin x = 0 \\ &\Leftrightarrow \cos x \sin x = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin(2x) = 1 \\ &\Leftrightarrow \sin(2x) = 2 \end{aligned}$$

Dado que  $|\sin \alpha| \leq 1, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ , concluimos que el conjunto solución de esta ecuación es  $Z_2 = \emptyset$ . De todo lo anterior deducimos que los ceros de la función están en el conjunto

$$Z = Z_1 \cup Z_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}.$$

**(b)** Demuestre la identidad

$$\frac{1}{\operatorname{tg}(3x) - \operatorname{tg}(x)} - \frac{1}{\operatorname{cotg}(3x) - \operatorname{cotg}(x)} = \operatorname{cotg}(2x)$$

**Solución**

Primero veamos la siguiente identidad

$$\operatorname{tg}(2x) = \operatorname{tg}(3x - x) = \frac{\operatorname{tg}(3x) - \operatorname{tg}(x)}{1 + \operatorname{tg}(3x) \operatorname{tg}(x)}$$

y recordando que

$$\operatorname{cotg}(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}(x)}$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\operatorname{tg}(3x) - \operatorname{tg}(x)} - \frac{1}{\operatorname{cotg}(3x) - \operatorname{cotg}(x)} &= \frac{1}{\operatorname{tg}(3x) - \operatorname{tg}(x)} - \frac{1}{\frac{1}{\operatorname{tg}(3x)} - \frac{1}{\operatorname{tg}(x)}} \\
 &= \frac{1}{\operatorname{tg}(3x) - \operatorname{tg}(x)} - \frac{1}{\frac{\operatorname{tg}(x) - \operatorname{tg}(3x)}{\operatorname{tg}(3x) \operatorname{tg}(x)}} \\
 &= \frac{1}{\operatorname{tg}(3x) - \operatorname{tg}(x)} - \frac{\operatorname{tg}(3x) \operatorname{tg}(x)}{\operatorname{tg}(x) - \operatorname{tg}(3x)} \\
 &= \frac{1}{\operatorname{tg}(3x) - \operatorname{tg}(x)} + \frac{\operatorname{tg}(3x) \operatorname{tg}(x)}{\operatorname{tg}(3x) - \operatorname{tg}(x)} \\
 &= \frac{1 + \operatorname{tg}(3x) \operatorname{tg}(x)}{\operatorname{tg}(3x) - \operatorname{tg}(x)} \\
 &= \frac{1}{\operatorname{tg}(2x)} \\
 &= \operatorname{cotg}(2x)
 \end{aligned}$$

**P3.** Demuestre la siguiente identidad trigonométrica:

$$\frac{1}{2} \operatorname{sen} x \sec^2 \frac{x}{2} + \cos x \tan \frac{x}{2} - \operatorname{sen} x = 0$$

**Solución**

Para simplificar un poco los cálculos, haremos el cambio  $x = 2\alpha$ . A primera vista parece que el cambio no ayuda mucho, pero nos permite escribir la expresión en términos de ángulos dobles, que tienen identidades más fáciles. Además notemos que como aparecen  $\sec x$  y  $\tan x$ , se subentiende que estamos en un dominio tal que tiene sentido hablar de  $\frac{1}{\cos x}$ . Dicho esto, desarrollemos la expresión

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \operatorname{sen} x \sec^2 \frac{x}{2} + \cos x \tan \frac{x}{2} - \operatorname{sen} x &= \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\alpha \sec^2 \alpha + \cos 2\alpha \tan \frac{\alpha}{-} \operatorname{sen} 2\alpha \\
 &= \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \sec^2 \alpha + (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) \tan \alpha - \operatorname{sen} 2\alpha \\
 &= \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \cos^2 \alpha \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} - \operatorname{sen}^2 \alpha \tan \alpha - \operatorname{sen} 2\alpha \\
 &= \tan \alpha + \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha \tan \alpha - \operatorname{sen} 2\alpha \\
 &= \tan \alpha (1 - \operatorname{sen}^2 \alpha) + \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} 2\alpha \\
 &= \tan \alpha \cos^2 \alpha + \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} 2\alpha \\
 &= \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \cos^2 \alpha + \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} 2\alpha \\
 &= \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - \operatorname{sen} 2\alpha \\
 &= 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha - \operatorname{sen} 2\alpha \\
 &= \operatorname{sen} 2\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

**P4.** Demuestre que  $\forall \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  se cumplen las siguientes igualdades:

(a)  $\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma = \frac{1}{2} (\cos(\beta - \gamma) - \cos(\beta + \gamma))$

**Solución**

Si partimos por la derecha, utilizando la identidad  $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} (\cos(\beta - \gamma) - \cos(\beta + \gamma)) &= \frac{1}{2} (\cancel{\cos \beta \cos \gamma} + \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma - \cancel{\cos \beta \cos \gamma} + \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 2 \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma \\
 &= \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \gamma
 \end{aligned}$$

(b)  $\sin \beta \cos \gamma = \frac{1}{2}(\sin(\beta + \gamma) + \sin(\beta - \gamma))$

**Solución**

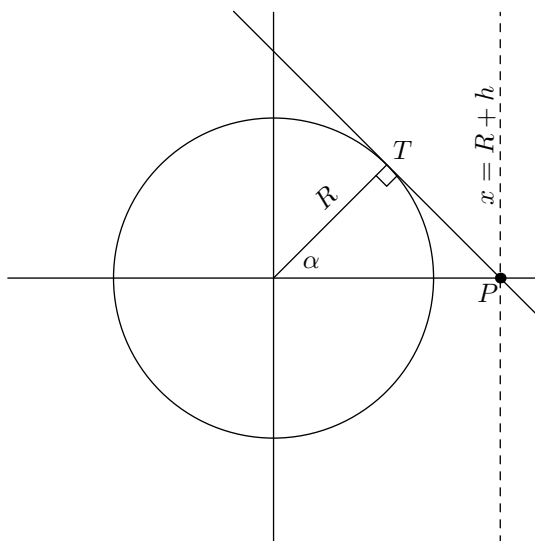
Si partimos por la derecha, utilizando la identidad  $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\sin(\beta + \gamma) + \sin(\beta - \gamma)) &= \frac{1}{2}(\sin \beta \cos \gamma + \cancel{\cos \beta \sin \gamma} + \sin \beta \cos \gamma - \cancel{\cos \beta \sin \gamma}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \sin \beta \cos \gamma \\ &= \sin \beta \cos \gamma \end{aligned}$$

**P5.** Suponga que usted está parado a una altura  $h$  sobre el nivel del mar, mirando al horizonte. Suponga que la Tierra es una circunferencia de radio  $R$ . Calcule la cantidad máxima de kilómetros que es posible ver, es decir, el largo del arco de circunferencia que es posible ver.

**Solución**

Supongamos que nos encontramos parados en un punto  $P$  en el espacio. Para simplificar las cosas, tomaremos los ejes coordenados centrados en el centro de la Tierra, y pondremos el punto  $P$  sobre el eje  $OX$ . Sabemos que el largo de un arco de circunferencia se calcula como  $R \cdot \alpha$ , donde  $R$  es el radio de la circunferencia y  $\alpha$  es el ángulo que subtiende el arco. Entonces, necesitamos calcular el ángulo que forma la recta que pasar por el punto  $P$  y la tangente a la Tierra que pasa por  $P$ . El punto de tangencia  $T$  es donde termina la línea visual de la persona. Tenemos entonces la siguiente situación



Como se ve en el dibujo,  $\overline{OP} = R + h$ ,  $\overline{OT} = R$ . Sabemos que el radio siempre es perpendicular a una tangente en su punto de intersección; hemos formado un triángulo rectángulo. Entonces tenemos que

$$\cos \alpha = \frac{\overline{OT}}{\overline{OP}} = \frac{R}{R + h}$$

y aplicando inversa

$$\alpha = \arccos \left( \frac{R}{R + h} \right)$$

Por tanto, la distancia que es posible ver es

$$R \cdot \alpha = R \arccos \left( \frac{R}{R + h} \right)$$