

Pauta Guía Problemas Semana 2

Profesor: Jorge San Martín H.

Auxiliares: Gianfranco Liberoni, Nikolas Tapia

P1. (a) Demuestre que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x, y > 0, (x + y)(x^{-1} + y^{-1}) \geq 4.$$

Indique qué axiomas o propiedades del orden está utilizando.

(b) i) Demuestre que

$$\forall x \in \mathbb{R}, x > 0, x^2 + \frac{2}{x} \geq 3.$$

Hint: Analice el producto $(x - 1)^2(x + 2)$.

ii) Demuestre que, para $a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0$, se tiene:

$$a^3 + 2b^3 \geq 3ab^2.$$

Hint: Utilice la parte anterior.

Solución:

(a) Para demostrar, ocuparemos la desigualdad $x^2 + y^2 \geq 2xy$ (se deja como ejercicio para el lector demostrarla, o bien recordar su demostración vista en clases), que se cumple $\forall x, y \in \mathbb{R}$. La idea es tomar una de las dos componentes de la desigualdad, y llegar a la otra. Partiendo por el lado izquierdo, se tiene:

$$\begin{aligned} (x + y)(x^{-1} + y^{-1}) &= (x + y)(x^{-1} + y^{-1})(xy)(xy)^{-1} \\ &= (x + y)(x^{-1}xy + y^{-1}xy)(xy)^{-1} \\ &= (x + y)(y + x)(xy)^{-1} \\ &= (x + y)^2(xy)^{-1} \\ &= (x^2 + 2xy + y^2)(xy)^{-1} \\ &= (x^2 + y^2 + 2xy)(xy)^{-1} \\ &\geq (2xy + 2xy)(xy)^{-1} && \text{(Desigualdad Mencionada)} \\ &= 4(xy)(xy)^{-1} = 4. \blacksquare \end{aligned}$$

(b) i) Siguiendo el hint, notemos que $(x - 1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, y por lo tanto, sigue siéndolo para $x > 0$. Además, $(x + 2) > 0$ en estas circunstancias. Así, podemos concluir que

$$(x - 1)^2(x + 2) \geq 0, \forall x > 0.$$

Desarrollando esta desigualdad, tenemos:

$$\begin{aligned} (x - 1)^2(x + 2) \geq 0 &\Leftrightarrow (x - 1)(x - 1)(x + 2) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1)(x + 2) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 4x + x + 2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 + 3x \geq 0 + 3x && \text{(Propiedad (*))} \\ &\Leftrightarrow x^3 + 2 \geq 3x \\ &\Leftrightarrow x^2 + \frac{2}{x} \geq 3. \blacksquare && \text{(Propiedad (*))} \end{aligned}$$

Demostración en la que se ocuparon las siguientes propiedades:

(*) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}, x \geq y \Rightarrow x + a \geq y + a$

(*) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \forall a > 0, x \geq y \Rightarrow \frac{x}{a} \geq \frac{y}{a}$

- ii) Lo encontrado en la parte anterior vale $\forall x > 0$, consideremos entonces x de la forma $x = \frac{a}{b}$, con $a, b > 0$. Reemplazando, obtenemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{2}{\frac{a}{b}} \geq 3 &\Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2} + 2\frac{b}{a} \geq 3 & // \cdot ab^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow a^3 + 2b^3 \geq 3ab^2. \blacksquare \end{aligned}$$

- P2.** (a) Sea A el conjunto solución de la inecuación $|x| \leq |x-1|$ y sea B el conjunto solución de la inecuación $|4x-2| > x(1-2x)$.

i) Resuelva las inecuaciones, esto es, determine A y B .

ii) Calcule $A \cup B$, $A \cap B$.

- (b) Resuelva la inecuación:

$$\frac{|x-2| + |2x+11|}{(x-2)|x+|x-2||} < \frac{1}{2}.$$

- (c) Encuentre el conjunto solución de la inecuación

$$|x^2 + 3x| + x|x+3| + x^2 \geq 7 + |1+x^2|.$$

- (d) Encuentre el conjunto solución de la siguiente inecuación

$$\frac{|x^2 - 2x + 1|}{|x^2 - 3x + 2|} \leq 1.$$

- (e) Encuentre el conjunto solución de la inecuación

$$|x^2 - 2x| + x|x+3| \geq 3.$$

Solución:

- (a) i) Comencemos buscando A , notemos que los puntos críticos de esta inecuación son $x = 0$ y $x = 1$. Siendo así, consideremos los siguientes intervalos, y estudiemos la inecuación en cada uno de ellos:

- $x \in (-\infty, 0]$

$$\begin{aligned} |x| \leq |x-1| &\Leftrightarrow -x \leq -x+1 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución de la inecuación en este intervalo es el conjunto definido por $A_1 = \mathbb{R} \cap (-\infty, 0] = (-\infty, 0]$.

- $x \in (0, 1]$

$$\begin{aligned} |x| \leq |x-1| &\Leftrightarrow x \leq -x+1 \\ &\Leftrightarrow 2x \leq 1 \\ &\Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Lo que implica que aquí, la solución es $A_2 = (-\infty, \frac{1}{2}] \cap (0, 1] = (0, \frac{1}{2}]$

- $x \in (1, \infty)$

$$\begin{aligned} |x| \leq |x-1| &\Leftrightarrow x \leq x-1 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq -1 \end{aligned}$$

Lo que tiene como conjunto solución a $A_3 = \phi \cap (1, \infty) = \phi$

Finalmente, la solución global de la inecuación es $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = (-\infty, \frac{1}{2}]$.

Buscando ahora al conjunto B, comencemos notando que el único punto crítico de la inecuación es $x = \frac{1}{2}$. Así, separemos el estudio en los siguientes intervalos:

- $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$

$$\begin{aligned} |4x - 2| > x(1 - 2x) &\Leftrightarrow 2 - 4x > x(1 - 2x) \\ &\Leftrightarrow 2(1 - 2x) > x(1 - 2x) \\ &\Leftrightarrow 2 > x \end{aligned}$$

Donde el último paso es válido, ya que $1 - 2x > 0$ en el intervalo estudiado. Así, la solución encontrada es $B_1 = (-\infty, 2) \cap (-\infty, \frac{1}{2}) = (-\infty, \frac{1}{2})$.

- $x \in (\frac{1}{2}, \infty)$

$$\begin{aligned} |4x - 2| > x(1 - 2x) &\Leftrightarrow 4x - 2 > x(1 - 2x) \\ &\Leftrightarrow 2(2x - 1) > x(1 - 2x) \\ &\Leftrightarrow 2(2x - 1) > -x(2x - 1) \\ &\Leftrightarrow 2 > -x \\ &\Leftrightarrow -2 < x \end{aligned}$$

Notar que $2x - 1 > 0$ en este intervalo, por lo que pudimos cancelar el término sin dar vuelta la desigualdad. Así, obtenemos $B_2 = (-2, \infty) \cap (\frac{1}{2}, \infty) = (\frac{1}{2}, \infty)$.

Descartamos la posibilidad $x = \frac{1}{2}$, ya que de ser así, obtendríamos $0 > 0$, lo que jamás es cierto. Se concluye que $B = B_1 \cup B_2 = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$.

ii) Directamente, tenemos:

$$\begin{aligned} A \cup B &= (-\infty, \frac{1}{2}] \cup \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\} = \mathbb{R}. \\ A \cap B &= (-\infty, \frac{1}{2}] \cap \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\} = (-\infty, \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

(b) Comencemos reduciendo el problema, dejando sólo una fracción:

$$\begin{aligned} \frac{|x - 2| + |2x + 11|}{(x - 2)|x + |x - 2|} < \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \frac{|x - 2| + |2x + 11|}{(x - 2)|x + |x - 2|} - \frac{1}{2} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2|x - 2| + 2|2x + 11| - (x - 2)|x + |x - 2|}{2(x - 2)|x + |x - 2|} < 0 \end{aligned}$$

Notemos ahora que los puntos críticos de la inecuación son $x = 2$, $x = \frac{-11}{2}$. Siendo así, estudiémosla en los siguientes intervalos:

- $x \in (-\infty, \frac{-11}{2})$

$$\begin{aligned} \frac{|x - 2| + |2x + 11|}{(x - 2)|x + |x - 2|} < \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \frac{2(2 - x) + 2(-2x - 11) - (x - 2)|x + 2 - x|}{2(x - 2)|x - x + 2|} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{4 - 2x - 4x - 22 + 4 - 2x}{4x - 8} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-8x - 14}{4x - 8} < 0 \\ &\Leftrightarrow -8x - 14 > 0 \\ &\Leftrightarrow x < \frac{-7}{4} \end{aligned}$$

Donde se impuso que el numerador fuera positivo, ya que el denominador es siempre negativo en el intervalo estudiado.

Se concluye que la solución aquí es $S_1 = (-\infty, \frac{-7}{4}) \cap (-\infty, \frac{-11}{2}) = (-\infty, \frac{-11}{2})$.

- $x \in (-\frac{11}{2}, 2)$

$$\begin{aligned} \frac{|x-2| + |2x+11|}{(x-2)|x+|x-2||} < \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \frac{2(2-x) + 2(2x+11) - (x-2)|x-x+2|}{2(x-2)|x-x+2||} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{4-2x+4x+22+4-2x}{4x-8} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{30}{4x-8} < 0 \\ &\Leftrightarrow 30 > 0 \end{aligned}$$

De donde concluimos que $S_2 = \mathbb{R} \cap (-\frac{11}{2}, 2) = (-\frac{11}{2}, 2)$.

- $x \in (2, \infty)$

$$\begin{aligned} \frac{|x-2| + |2x+11|}{(x-2)|x+|x-2||} < \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \frac{2(x-2) + 2(2x+11) - (x-2)(2x-2)}{2(x-2)(2x-2)} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2x-4+4x+22-2x^2+2x+4x-4}{4(x-2)(x-1)} < 0 \\ &\Leftrightarrow -2x^2+12x+22 < 0 \\ &\Leftrightarrow x^2-6x-7 > 0 \\ &\Leftrightarrow (x-7)(x+1) > 0 \end{aligned}$$

De donde se concluye que $S_3 = [(-\infty, -1) \cup (7, \infty)] \cap (2, \infty) = (7, \infty)$.

Notemos que $x = 2$ indefinición la fracción, por lo que no puede ser incluido en la solución final, y tenemos el caso contrario para $x = -\frac{11}{2}$ (ejercicio para el lector verificarlo).

Así, la solución global es $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \{-\frac{11}{2}\} = (-\infty, 2) \cup (7, \infty)$.

(c) Al ver la inecuación propuesta, notamos que $|1+x^2| = 1+x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Así, obtenemos:

$$\begin{aligned} |x^2+3x| + x|x+3| + x^2 \geq 7 + |1+x^2| &\Leftrightarrow |x^2+3x| + x|x+3| + x^2 \geq 7 + 1 + x^2 \\ &\Leftrightarrow |x^2+3x| + x|x+3| \geq 8 \\ &\Leftrightarrow |x||x+3| + x|x+3| \geq 8 \\ &\Leftrightarrow (|x|+x)|x+3| \geq 8 \end{aligned}$$

Inecuación que tiene como puntos críticos a $x = 0, x = -3$.

- $x \in (-\infty, -3)$

$$(|x|+x)|x+3| \geq 8 \Leftrightarrow 0 \geq 8$$

Lo que no tiene solución en este intervalo, vale decir, $S_1 = \phi \cap (-\infty, -3) = \phi$.

- $x \in (-3, 0)$

$$(|x|+x)|x+3| \geq 8 \Leftrightarrow 0 \geq 8$$

Lo que tampoco tiene solución, vale decir, $S_2 = \phi \cap (-3, 0) = \phi$.

- $x \in (0, \infty)$

$$\begin{aligned} (|x|+x)|x+3| \geq 8 &\Leftrightarrow 2x(x+3) \geq 8 \\ &\Leftrightarrow 2x^2+6x-8 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x^2+3x-4 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x+4)(x-1) \geq 0 \end{aligned}$$

Intervalo en el que sí encontramos solución, y es $S_3 = \{(-\infty, -4] \cup [1, \infty)\} \cap (0, \infty) = [1, \infty)$.

De esta forma, y verificando que ningún punto crítico puede ser incluido, se concluye que $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = [1, \infty)$.

(d) Reescribamos la inecuación planteada, de la siguiente forma:

$$\frac{|x^2 - 2x + 1|}{|x^2 - 3x + 2|} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{|x-1||x-1|}{|x-1||x-2|} \leq 1$$

Escrito así, podemos concluir en forma automática que x debe ser distinto de 1 y de 2, por lo que podemos simplificar la expresión, y concluir que nuestro problema es equivalente a:

$$|x-1| \leq |x-2|,$$

inecuación que tiene como puntos críticos a $x = 1$ y $x = 2$. Realizando el análisis ya conocido:

- $x \in (-\infty, 1)$

$$\begin{aligned} |x-1| \leq |x-2| &\Leftrightarrow 1-x \leq 2-x \\ &\Leftrightarrow 1 \leq 2 \end{aligned}$$

Obtenemos que el conjunto solución es $S_1 = \mathbb{R} \cap (-\infty, 1) = (-\infty, 1)$.

- $x \in (1, 2)$

$$\begin{aligned} |x-1| \leq |x-2| &\Leftrightarrow x-1 \leq 2-x \\ &\Leftrightarrow 2x \leq 3 \\ &\Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Aquí, las soluciones están en $S_2 = (-\infty, \frac{3}{2}] \cap (1, 2) = (1, \frac{3}{2}]$.

- $x \in (2, \infty)$

$$\begin{aligned} |x-1| \leq |x-2| &\Leftrightarrow x-1 \leq x-2 \\ &\Leftrightarrow -1 \leq -2 \end{aligned}$$

Se concluye que $S_3 = \emptyset \cap (2, \infty) = \emptyset$.

Finalmente, como ya fueron descartados los puntos críticos, $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = (-\infty, \frac{3}{2}] \setminus \{1\}$.

(e) Reescribamos la inecuación de la siguiente forma:

$$|x^2 - 2x| + x|x+3| \geq 3 \Leftrightarrow |x||x-2| + x|x+3| \geq 3.$$

Así, observamos que los puntos críticos son $x = -3$, $x = 0$ y $x = 2$. Aplicando el método conocido para resolver:

- $x \in (-\infty, -3)$

$$\begin{aligned} |x||x-2| + x|x+3| \geq 3 &\Leftrightarrow -x(2-x) + x(-x-3) \geq 3 \\ &\Leftrightarrow -2x + x^2 - x^2 - 3x \geq 3 \\ &\Leftrightarrow -5x \geq 3 \\ &\Leftrightarrow x \leq -\frac{3}{5} \end{aligned}$$

Así, $S_1 = (-\infty, -\frac{3}{5}] \cap (-\infty, -3) = (-\infty, -3)$.

- $x \in (-3, 0)$

$$\begin{aligned} |x||x-2| + x|x+3| \geq 3 &\Leftrightarrow -x(2-x) + x(x+3) \geq 3 \\ &\Leftrightarrow -2x + x^2 + x^2 + 3x \geq 3 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 + x - 3 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 2(x + \frac{3}{2})(x-1) \geq 0 \end{aligned}$$

De esta forma, el conjunto solución es $S_2 = \{(-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [1, \infty)\} \cap (-3, 0) = (-3, -\frac{3}{2}]$.

- $x \in (0, 2)$

$$\begin{aligned}
 |x||x-2| + x|x+3| \geq 3 &\Leftrightarrow x(2-x) + x(x+3) \geq 3 \\
 &\Leftrightarrow 2x - x^2 + x^2 + 3x \geq 3 \\
 &\Leftrightarrow 5x \geq 3 \\
 &\Leftrightarrow x \geq \frac{3}{5}
 \end{aligned}$$

Concluimos que $S_3 = [\frac{3}{5}, \infty) \cap (0, 2) = [\frac{3}{5}, 2)$.

- $x \in (2, \infty)$

$$\begin{aligned}
 |x||x-2| + x|x+3| \geq 3 &\Leftrightarrow x(x-2) + x(x+3) \geq 3 \\
 &\Leftrightarrow x^2 - 2x + x^2 + 3x \geq 3 \\
 &\Leftrightarrow 2x^2 + x - 3 \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow 2(x + \frac{3}{2})(x - 1) \geq 0
 \end{aligned}$$

Llegando así, a $S_4 = \{(-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [1, \infty)\} \cap (2, \infty) = (2, \infty)$.

Analizando los puntos críticos de forma separada, notamos que debemos agregar a las soluciones los valores $x = -3$ y $x = 2$, obteniendo la solución global:

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup \{-3, 2\} = (-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [\frac{3}{5}, \infty).$$