

Pauta Guía Problemas Semana 1

Profesor: Jorge San Martín H.

Auxiliares: Gianfranco Liberona, Nikolas Tapia

P1. Usando exclusivamente los axiomas de los reales y mencionándolos claramente cada vez que los use, demuestre las propiedades siguientes. Si ocupa alguna otra propiedad entonces deberá demostrarla indicando los axiomas que use en ello.

(a) $\forall x, y \in \mathbb{R}, x, y \neq 0, (x + y)(x^{-1}y^{-1}) = x^{-1} + y^{-1}.$

(b) $\forall x, y \in \mathbb{R}, x, y \neq 0, (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}.$

(c) Usando (b), demostrar que $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, b, d \neq 0, ab^{-1} + cd^{-1} = (ad + cb)(bd)^{-1}.$

(d) $\forall a \in \mathbb{R}, a^2 = 0 \Rightarrow a = 0.$

Solución:

(a) Desarrollemos directamente la expresión de la izquierda:

$$\begin{aligned}
 (x + y)(x^{-1}y^{-1}) &= x(x^{-1}y^{-1}) + y(x^{-1}y^{-1}) && \text{(Distributividad)} \\
 &= (xx^{-1})y^{-1} + y(x^{-1}y^{-1}) && \text{(Asociatividad de } \cdot \text{)} \\
 &= (xx^{-1})y^{-1} + y(y^{-1}x^{-1}) && \text{(Conmutatividad de } \cdot \text{)} \\
 &= (xx^{-1})y^{-1} + (yy^{-1})x^{-1} && \text{(Asociatividad de } \cdot \text{)} \\
 &= 1y^{-1} + 1x^{-1} && \text{(Inverso Multiplicativo)} \\
 &= y^{-1} + x^{-1} && \text{(Neutro Multiplicativo)} \\
 &= x^{-1} + y^{-1}. \blacksquare && \text{(Conmutatividad de } + \text{)}
 \end{aligned}$$

(b) Para demostrar esta igualdad, probaremos primero que $y^{-1}x^{-1}$ es inverso multiplicativo de xy , en efecto:

$$\begin{aligned}
 (xy)(y^{-1}x^{-1}) &= x(yy^{-1})x^{-1} && \text{(Asociatividad de } \cdot \text{)} \\
 &= x \cdot 1 \cdot x^{-1} && \text{(Inverso Multiplicativo)} \\
 &= x \cdot x^{-1} && \text{(Neutro Multiplicativo)} \\
 &= 1 && \text{(Inverso Multiplicativo)}
 \end{aligned}$$

Finalmente, recordamos que por un teorema visto en clases, sabemos que el inverso multiplicativo es único, concluyendo así que $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$. \blacksquare

(c) Desarrollaremos el sector derecho de la igualdad propuesta:

$$\begin{aligned}
 (ad + cb)(bd)^{-1} &= (ad + cb)(d^{-1}b^{-1}) && \text{(Parte (b))} \\
 &= ad(d^{-1}b^{-1}) + cb(d^{-1}b^{-1}) && \text{(Distributividad)} \\
 &= a(dd^{-1})b^{-1} + cb(d^{-1}b^{-1}) && \text{(Asociatividad de } \cdot \text{)} \\
 &= a(dd^{-1})b^{-1} + cb(b^{-1}d^{-1}) && \text{(Conmutatividad de } \cdot \text{)} \\
 &= a(dd^{-1})b^{-1} + c(bb^{-1})d^{-1} && \text{(Asociatividad de } \cdot \text{)} \\
 &= a(1)b^{-1} + c(1)d^{-1} && \text{(Inverso Multiplicativo)} \\
 &= ab^{-1} + cd^{-1}. \blacksquare && \text{(Neutro Multiplicativo)}
 \end{aligned}$$

(d) Notemos que $a^2 = 0 \Leftrightarrow a \cdot a = 0$. En cátedra vimos que:

$$p \cdot q = 0 \Rightarrow p = 0 \vee q = 0,$$

propiedad que se demuestra de la siguiente forma: suponiendo inicialmente que $p \neq 0$, podemos obtener el valor de q multiplicando ambos lados de la expresión por p^{-1} , obteniendo así que $q = 0$ (para concluir esto, falta probar que $a \cdot 0 = 0, \forall a \in \mathbb{R}$, lo que se deja de ejercicio para el lector). Análogamente, suponiendo el caso $q \neq 0$, se obtiene $p = 0$, y queda demostrada la propiedad. Así, aplicándola en este caso:

$$a^2 = a \cdot a = 0 \Rightarrow a = 0 \vee a = 0 \Rightarrow a = 0. \blacksquare$$

P2. Usando **sólo** los axiomas de los números reales y las unicidades de los inversos, demuestre las siguientes propiedades (si necesita alguna propiedad extra, **debe demostrarla**)

(a) Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $(-x) + (-y)$ es inverso aditivo de $x + y$.

(b) Si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ son tales que se verifica la relación $(ad) + (-(cb)) = 0$ entonces

$$[(a + b)d] + [-(c + d)b] = 0.$$

(c) Para $a \neq 0$, $-(a^{-1}) = (-a)^{-1}$.

Solución:

(a) En efecto:

$$\begin{aligned} (x + y) + [(-x) + (-y)] &= x + [y + (-x)] + (-y) && \text{(Asociatividad de +)} \\ &= x + [(-x) + y] + (-y) && \text{(Conmutatividad de +)} \\ &= [x + (-x)] + [y + (-y)] && \text{(Asociatividad de +)} \\ &= 0 + 0 && \text{(Inverso Aditivo)} \\ &= 0. \blacksquare && \text{(Neutro Aditivo)} \end{aligned}$$

(b) Calculemos directamente:

$$\begin{aligned} [(a + b)d] + [-(c + d)b] &= ad + bd + [-(bc + bd)] && \text{(Distributividad)} \\ &= ad + bd + [(-bc) + (-bd)] && \text{(Parte (a))} \\ &= ad + bd + [(-bd) + (-bc)] && \text{(Conmutatividad de +)} \\ &= ad + [bd + (-bd)] + (-bc) && \text{(Asociatividad de +)} \\ &= ad + 0 + (-bc) && \text{(Inverso Aditivo)} \\ &= ad + (-bc) && \text{(Neutro Aditivo)} \\ &= 0. \blacksquare && \text{(Hipótesis)} \end{aligned}$$

(c) Tenemos dos posibles formas de demostrar esto, una es verificar que $a^{-1} + (-a)^{-1} = 0$, y la otra es mostrar que $(-a) \cdot -(a^{-1}) = 1$. Ambas demostraciones, junto a la unicidad de los inversos aditivo y multiplicativo respectivamente, permiten concluir lo pedido.

Aquí haremos la demostración ocupando la segunda opción; en efecto, tenemos:

$$\begin{aligned} (-a) \cdot -(a^{-1}) &= (-1 \cdot a) \cdot -(1 \cdot a^{-1}) && \text{(Neutro Multiplicativo)} \\ &= -1 \cdot (a \cdot -1) \cdot a^{-1} && \text{(Asociatividad de \cdot)} \\ &= -1 \cdot (-1 \cdot a) \cdot a^{-1} && \text{(Conmutatividad de \cdot)} \\ &= (-1 \cdot -1) \cdot (a \cdot a^{-1}) && \text{(Asociatividad de \cdot)} \\ &= (-1 \cdot -1) \cdot (1) && \text{(Inverso Multiplicativo)} \\ &= (-1 \cdot -1) && \text{(Neutro Multiplicativo)} \\ &= 1 && \text{(Propiedad (*))} \end{aligned}$$

Para que nuestra respuesta sea completamente correcta, debemos probar la propiedad $(*)$, vale decir, debemos demostrar que $-1 \cdot -1 = 1$. Consideremos la siguiente suma:

$$\begin{aligned} (-1 \cdot -1) + (-1) &= (-1 \cdot -1) + (-1) \cdot 1 && \text{(Neutro Multiplicativo)} \\ &= (-1)[(-1) + 1] && \text{(Distributividad)} \\ &= (-1) \cdot 0 && \text{(Inverso Aditivo)} \\ &= 0. \blacksquare && \text{(Propiedad } (*)) \end{aligned}$$

Donde la propiedad $(*)$, es la que se dejó propuesta para el lector en **P1.(d)**. Así, nuevamente recurriendo a la unicidad del inverso aditivo, se llega a que $-1 \cdot -1 = 1$, lo que comprueba la veracidad de la propiedad que enunciamos.

Demostrada $(*)$, la unicidad del inverso multiplicativo implica que $-(a^{-1}) = (-a)^{-1}$. \blacksquare

P3. Usando propiedades elementales de los números reales, demuestre que para todo $x, y, z, w \in \mathbb{R}$, $w \neq 0$, $z \neq 0$ lo siguiente es verdadero

$$(xw + yz)^2 = (x^2 + y^2)(w^2 + z^2) \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ t.q. } x = \lambda w, y = \lambda z.$$

Para ello note en primer lugar que la igualdad del lado izquierdo de la implicancia permite deducir que $x^2z^2 + y^2w^2 = 2xwyz$. Luego, vea que esto último implica que $xz = yw$. Finalmente, de la igualdad anterior deduzca la conclusión.

Solución:

Comencemos desarrollando el sector izquierdo de la implicancia:

$$\begin{aligned} (xw + yz)^2 &= (x^2 + y^2)(w^2 + z^2) \Leftrightarrow x^2w^2 + 2xwyz + y^2z^2 = x^2w^2 + x^2z^2 + y^2w^2 + y^2z^2 \\ &\Leftrightarrow 2xwyz = x^2z^2 + y^2w^2 \\ &\Leftrightarrow x^2z^2 - 2xwyz + y^2w^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (xz - yw)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow xz - yw = 0 \\ &\Leftrightarrow xz = yw && (1) \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{w} = \frac{y}{z} && (2) \end{aligned}$$

Finalmente, de la expresión (1), podemos despejar: $x = \frac{y}{z}w$, $y = \frac{x}{w}z$, y eligiendo $\lambda = \frac{x}{w} = \frac{y}{z}$, por lo encontrado en (2), se concluye. \blacksquare

P4. Sea C un conjunto de números reales que satisface las siguientes propiedades (axiomas):

- (A1) $3 \in C$.
- (A2) Si $x \in C$, entonces $3x + 1 \in C$.
- (A3) Si $x, y \in C$, entonces $x + y \in C$.
- (A4) $7 \notin C$.

Demuestre entonces las siguientes propiedades indicando qué axiomas, ya sea de los números reales o de los recién mencionados, utiliza:

- (a) $1 \notin C$.
- (b) Si $x, y \in C$, entonces $3x + 2y + 4 \in C$.
- (c) Si $x, y \in C$, entonces $4 - x - y \notin C$.
- (d) Si $3y + z + 4 \notin C$, entonces $(y \notin C \vee \frac{z}{2} \notin C)$.
- (e) No existe $x \in C$ tal que $3(2x - 1) = 39$.

Solución:

- (a) Razonemos por absurdo. Supongamos que sí pertenece, entonces, considerando $x = y = 1$ en (A2), concluimos que $4 \in C$. Además, tomando $x = 4$ e $y = 3$, aplicando (A3), obtenemos que $7 \in C$, lo que consiste una contradicción con (A4). Por lo tanto, $1 \notin C$. \blacksquare

(b) Como $x \in C$, **(A2)** nos indica que $3x + 1 \in C$. Por otro lado, como $y \in C$, **(A3)** nos permite concluir que $y + y = 2y \in C$. Consideremos ahora $u = 3x + 1$, $v = 2y$, ambos elementos pertenecientes a C . Nuevamente aplicando **(A3)**, $u + v = 3x + 2y + 1 \in C$. Finalmente, aplicando otra vez **(A3)** con $w = 3x + 2y + 1$ y $z = 3$ (que pertenece a C por **(A1)**), se concluye que $3x + 2y + 4 \in C$.■

(c) Supongamos que $4 - x - y \in C$, trabajando un poco la expresión, tenemos que:

$$4 - x - y = 4 - (x + y) = 4 - z,$$

con $z \in C$, ya que $x, y \in C$. Claramente, si consideráramos $z = 3$, esto implicaría que $1 \in C$, lo que es una contradicción con lo probado en **(a)**. Concluimos así, que $4 - x - y \notin C$.■

(d) Notemos que **(b)**, como proposición lógica, equivale a:

$$x \in C \wedge y \in C \Rightarrow 3x + 2y + 4 \in C.$$

Considerando su contrarrecíproca, obtenemos lo siguiente:

$$3x + 2y + 4 \notin C \Rightarrow x \notin C \vee y \notin C.$$

Siendo así, y notando que $3y + z + 4 = 3y + 2 \cdot \frac{z}{2} + 4$, al aplicar la contrarrecíproca recién presentada, se concluye que $y \notin C \vee \frac{z}{2} \notin C$.■

(e) Resolviendo la ecuación:

$$3(2x - 1) = 39 \Leftrightarrow 2x - 1 = 13 \Leftrightarrow 2x = 14 \Leftrightarrow x = 7.$$

Se deja como ejercicio para el lector, detallar todos los axiomas usados en esta resolución. Finalmente, notamos que **(A4)** indica que $7 \notin C$, por lo tanto, concluimos que no existe solución en C para la ecuación planteada.■