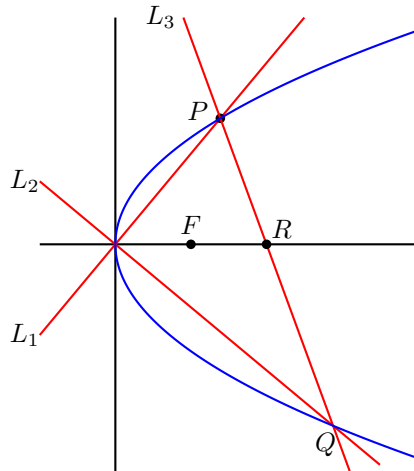


Semana 4

P1. Por el vértice de la parábola $y^2 = 4x$ se trazan dos rectas perpendiculares que cortan en P y Q a la parábola, $P \neq Q$. PQ corta al eje de simetría de la parábola en R . Probar que el foco divide al trazo OR en la razón 1 : 3.

Solución



La expresión $y^2 = 4x$ es la ecuación de una parábola de *eje horizontal* con directriz $D: x = -1$, foco $F = (1, 0)$ y vértice $V = (0, 0)$. Para ver esto podemos reescribir la ecuación como $x = \frac{1}{4p}y^2$ con $p = 1$ y entonces

$$\begin{aligned} D: x &= -p = -1 \\ F &= (p, 0) = (1, 0) \\ V &= (0, 0) \end{aligned}$$

o bien de la forma

$$x = ay^2 + by + c \quad \text{con } a = \frac{1}{4}, \quad b = 0 \quad \text{y } c = 0$$

de modo que

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 0 = 0$$

$$D: x = \frac{-1 - \Delta}{4a} = \frac{-1 - 0}{4 \cdot \frac{1}{4}} = -1$$

$$F = \left(\frac{1 - \Delta}{4a}, -\frac{b}{2a} \right) = (1, 0)$$

$$V = \left(-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a} \right) = (0, 0)$$

Sabemos que L_1 y L_2 cortan al eje OY en el origen O y que son perpendiculares.

Si $L_1: y = mx$ con $m \neq 0$ entonces $L_2: y = -\frac{1}{m}x$. Para determinar R , necesitamos encontrar primero P y Q .

P : es el punto de intersección, distinto a 0, entre la parábola y L_1 . Así, si $P = (x_p, y_p)$ entonces $y_p = mx_p$ y $y_p^2 = 4x_p$, luego

$$\begin{aligned} 4x_p = m^2x_p^2 &\Leftrightarrow x_p(m^2x_p - 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow x_p = 0 \vee x_p = \frac{4}{m^2} \end{aligned}$$

El caso $x_p = 0$ no interesa pues corresponde al origen O . Así $x_p = \frac{4}{m^2} \Rightarrow y_p = \frac{4}{m}$ y por lo tanto $P = (\frac{4}{m^2}, \frac{4}{m})$

Q : Se obtiene de forma similar a lo anterior, con m reemplazado por $-\frac{1}{m}$, luego $Q = (4m^2, -4m)$.

R : Es la intersección de la recta L_3 , que pasa por P y Q , con el eje OX . La ecuación punto-punto de esa recta es

$$L_3: y - y_p = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p}(x - x_p)$$

de donde

$$y - \frac{4}{m} = -\frac{m(m^2 + 1)}{m^4 - 1}\left(x - \frac{4}{m^2}\right)$$

Si $R = (x_R, y_R)$ entonces sabemos que $y_R = 0$ y x_R se encuentra haciendo $y = 0$ en la última ecuación.

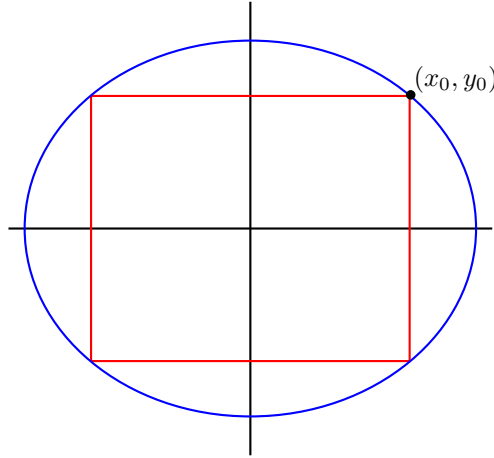
Observación: En la última ecuación hemos supuesto implícitamente que $m \neq \pm 1$ para que L_3 sea oblicua. Si $m = 1$ entonces $P = (4, 4)$ y $Q = (4, -4)$ de modo que L_3 es vertical y además se obtiene que $R = (4, 0)$ directamente. El caso $m = -1$ es similar. Esto justifica el caso $m = \pm 1$ por separado.

Volvamos al caso $m = \pm 1$. Haciendo $y = 0$ en la ecuación para L_3 se obtiene

$$x = \frac{+4}{m} \cdot \frac{m^4 - 1}{+m(m^2 + 1)} + \frac{4}{m^2} = \frac{4(m^4 - 1) + 4(m^2 + 1)}{m^4 + m^2} = 4.$$

P2. Considere la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, encontrar el punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^2$ tal que el rectángulo inscrito en la elipse que tiene a (x_0, y_0) como vértice y sus lados paralelos a los ejes de coordenadas tiene área máxima. Nota: utilice las propiedades de parábolas para determinar el máximo.

Solución



De acuerdo a la figura se tiene que el área del rectángulo inscrito es

$$A(x_0, y_0) = 4x_0y_0 \quad (1)$$

y como (x_0, y_0) pertenece a la elipse se satisface la relación

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \quad (2)$$

despejando y_0 en función de x_0 desde (2);

$$y_0 = \pm b\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}} \quad (3)$$

pero $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^2$, luego

$$y_0 = b\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}} \quad (4)$$

entonces reemplazando en (1) se obtiene;

$$A(x_0) = 4bx_0\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{a^2}}$$

entonces

$$A^2(x_0) = 16b^2x_0^2\left(1 - \frac{x_0^2}{a^2}\right)$$

ahora si usamos la variable auxiliar $u = x_0^2$ se tiene que

$$A^2(u) = 16b^2u(1 - \frac{u}{a^2}) \quad (5)$$

la cual corresponde a una parábola invertida, cuyo máximo se encuentra en el vértice, luego las coordenadas del vértice son

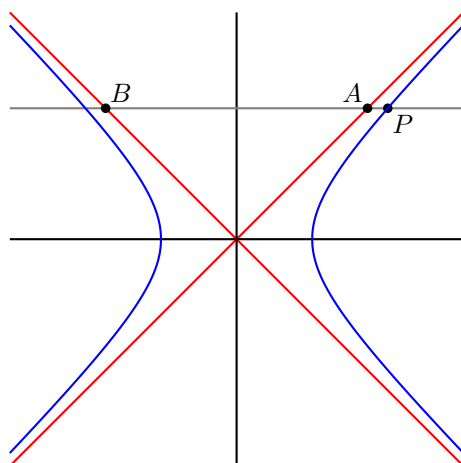
$$V = (\frac{a^2}{2}, 4b^2a^2)$$

es decir $(x_0^2) = u_{max} = \frac{a^2}{2}$ de donde $x_0 = \frac{a}{\sqrt{2}}$ y usando (4) se concluye que $(x_0, y_0) = (\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})$.

Observación: Notar que acá se maximizó el cuadrado del área del rectángulo inscrito en la elipse, pero maximizar una cantidad positiva es lo mismo que maximizar su cuadrado.

- P3.** Para la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ demostrar que $AP \cdot PB = a^2$, donde P es un punto sobre la hipérbola y A y B son las intersecciones de una recta que pasa por P paralela al eje X , con las asíntotas de la hipérbola.

Solución



Sea $P = (x_0, y_0)$ un punto sobre la hipérbola, entonces x_0 e y_0 satisfacen la siguiente relación:

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

Recordemos que la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ tiene asíntotas de ecuaciones $y = \pm \frac{b}{a}x$.

Determinemos A y B : La recta que pasa por $P = (x_0, y_0)$ paralela al eje X , tiene ecuación $y = y_0$ y como A es la intersección de esta recta con una de las asíntotas debe cumplir

$$y = y_0$$

$$y = \frac{b}{a}x$$

así $A = (\frac{ay_0}{b}, y_0)$, donde hemos supuesto sin pérdida de generalidad que $y_0 \geq 0$. Análogamente se obtiene que $B = (-\frac{ay_0}{b}, y_0)$.

Por lo tanto

$$d_{AP} = \sqrt{(x_0 - \frac{a}{b}y_0)^2 + (y_0 - y_0)^2} = |x_0 - \frac{a}{b}y_0|$$

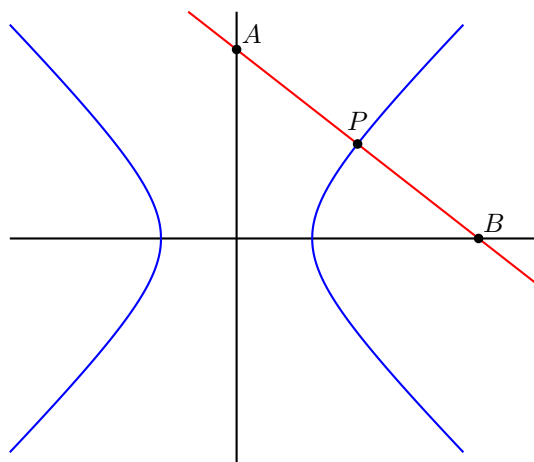
$$d_{BP} = \sqrt{(x_0 + \frac{a}{b}y_0)^2 + (y_0 - y_0)^2} = |x_0 + \frac{a}{b}y_0|$$

y entonces

$$\begin{aligned} d_{AP} \cdot d_{BP} &= |x_0 - \frac{a}{b}y_0| |x_0 + \frac{a}{b}y_0| \\ &= |x_0^2 - \frac{a^2}{b^2}y_0^2| \\ &= a^2 \underbrace{|\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2}|}_{=1} \\ &= a^2 \end{aligned}$$

P4. Considere la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ y un punto $P = (x_0, y_0)$ cualquiera de ella. La recta normal a la hipérbola por P corta al eje OX en A y al eje OY en B . Demuestre que P divide al trazo AB en una razón constante.

Solución



Recordemos que la ecuación de la recta tangente a una hipérbola en el punto (x_0, y_0) es

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1 \quad (6)$$

que se puede escribir como

$$y = \frac{b^2 x_0 x}{a^2 y_0} - \frac{b^2}{y_0}$$

es decir la pendiente de la recta tangente a la hipérbola es $m_1 = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}$ y así la pendiente de la recta normal es $m_2 = -\frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}$. Por lo tanto la ecuación de la recta normal es

$$y - y_0 = -\frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}(x - x_0) \quad (7)$$

Ahora debemos encontrar A y B :

A : A es la intersección de la recta normal con el eje OX , es decir satisface la ecuación (7) con $y = 0$, de donde se obtiene $A = (x_0 + \frac{b^2 x_0}{a^2}, 0)$.

B : B es la intersección de la recta normal con el eje OY , es decir satisface la ecuación (7) con $x = 0$, de donde se obtiene $B = (0, y_0 + \frac{a^2 y_0}{b^2})$.

Entonces

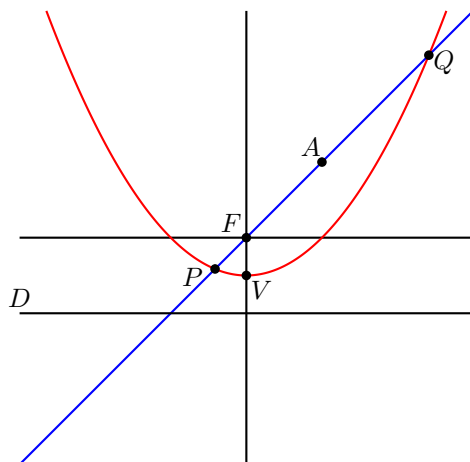
$$\begin{aligned} \frac{d_{AP}^2}{d_{BP}^2} &= \frac{(x_0 - (x_0 + \frac{b^2 x_0}{a^2}))^2 + (y_0 - 0)^2}{(x_0 - 0)^2 + (y_0 - (y_0 + \frac{a^2 y_0}{b^2}))^2} \\ &= \frac{b^4 b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2}{a^4 b^4 x_0^2 + a^4 y_0^2} \\ &= \frac{b^4}{a^4} \end{aligned}$$

por lo tanto P divide al trazo AB en una razón constante.

P5. Considere una parábola y una recta L que pasa por el foco de ésta. Escoja la posición de la parábola que más le convenga, por ejemplo con directriz vertical o bien horizontal, con el vértice en el origen o bien el foco en el origen. Suponga que L es no vertical de pendiente m y que no es paralela al eje de simetría de la parábola. Denotemos por $p > 0$ la distancia entre el foco y el vértice de la parábola.

- Escriba en términos de p y m una ecuación para la parábola y una para L .
- Calcule los dos puntos de intersección P y Q de L con la parábola en función de p y m .
- Encuentre el punto medio A del segmento PQ .
- Pruebe que $\text{dist}(A, P) = \text{dist}(A, D)$ donde D es la recta directriz de la parábola.
- Pruebe que las rectas tangentes a la parábola en los puntos P y Q son perpendiculares.

Solución



Sean F , V y D el foco, el vértice y la directriz de la parábola respectivamente. Escojamos la parábola como en la figura, es decir con el foco F en el origen de coordenadas y el vértice V a una distancia p desde el origen, luego

$$V = (0, -p)$$

$$F = (0, 0)$$

- (a) La ecuación de una parábola vertical de foco $(0, p)$ es $y = \frac{x^2}{4p}$, y trasladando el foco al origen se obtiene la ecuación de nuestra parábola

$$y = \frac{x^2}{4p} - p$$

y la ecuación de la recta es $y = mx$.

- (b) Para encontrar los puntos de intersección P y Q de L con la parábola debemos resolver el siguiente sistema

$$y = mx$$

$$y = \frac{x^2}{4p} - p$$

reemplazando la primera en la segunda ecuación, se obtiene la ecuación de segundo grado:

$$\frac{x^2}{4p} - mx - p = 0$$

cuyas soluciones son:

$$(x_Q, y_Q) = (2(m + \sqrt{m^2 + 1})p, 2(m + \sqrt{m^2 + 1})pm)$$

$$(x_P, y_P) = (2(m - \sqrt{m^2 + 1})p, 2(m - \sqrt{m^2 + 1})pm)$$

(c) Sea A el punto medio del segmento PQ , entonces

$$A = \frac{(x_Q, y_Q) + (x_P, y_P)}{2} = (2mp, 2m^2p).$$

(d) dado que la parábola es vertical, la directriz es una recta horizontal y la distancia entre ésta y el foco es P , entonces la directriz tiene ecuación $D : y = -2p$, por lo tanto

$$\text{dist}(A, D) = 2m^2p - (-2p) = 2m^2p + 2p = 2p(m^2 + 1)$$

y por otra lado

$$\begin{aligned} \text{dist}(A, P) &= \sqrt{\left(2mp - 2(m - \sqrt{m^2 + 1})p\right)^2 + \left(2m^2p - 2(m - \sqrt{m^2 + 1})pm\right)^2} \\ &= \sqrt{4(m^2 + 1)p^2m^2 + 4(m^2 + 1)p^2m^2} \\ &= \sqrt{4p^2(m^4 + m^2 + 1)} \\ &= 2p(m^2 + 1) \end{aligned}$$

por lo tanto $\text{dist}(A, P) = \text{dist}(A, D)$.

(e) la recta tangente a una parábola de ecuación $y = \frac{x^2}{4p} - p$ en el punto (α, β) (ver apunte) está dada por

$$x\alpha = 4p\left(\frac{y + \beta}{2} + p\right)$$

que se puede escribir como:

$$y = \frac{\alpha}{2p}x - (2p + \beta)$$

es decir la recta tangente posee pendiente $m_t = \frac{\alpha}{2p}$ luego la pendiente de la recta tangente que pasa por P , digamos m_P , es

$$m_P = (m + \sqrt{m^2 + 1})$$

y para Q , es

$$m_Q = (m - \sqrt{m^2 + 1})$$

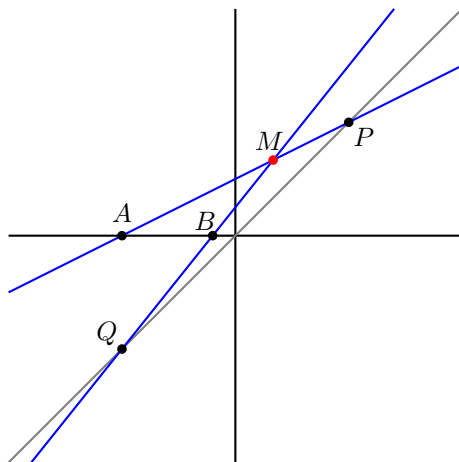
así

$$m_P \cdot m_Q = (m + \sqrt{m^2 + 1})(m - \sqrt{m^2 + 1}) = -1$$

y por lo tanto las rectas tangentes a la parábola en P y Q son perpendiculares.

P6. Dada la recta $L : y = kx$ y los puntos $A = (a, 0)$ y $B = (b, 0)$, se toma un punto cualquiera P sobre L y su simétrico Q con respecto al origen. Las rectas PA y QB se cortan en un punto M . Determinar el lugar geométrico de M cuando el punto P se desplaza sobre L .

Solución



Sea $P = (x_0, kx_0)$, entonces $Q = (-x_0, -kx_0)$.

Escribamos la ecuación de la recta que pasa por PA :

$$y - 0 = \frac{kx_0 - 0}{x_0 - a}(x - a)$$

lo mismo para QB :

$$y - 0 = \frac{-kx_0 - 0}{-x_0 - b}(x - b)$$

donde hemos supuesto que $x_0 \neq a$ y $x_0 \neq -b$.

M es la intersección es la solución del sistema

$$y = \frac{kx_0}{x_0 - a}(x - a)$$

$$y = \frac{kx_0}{x_0 + b}(x - b)$$

supongamos que $x_0 \neq 0$, entonces el sistema anterior se puede escribir como

$$y\left(1 - \frac{a}{x_0}\right) = k(x - a)$$

$$y\left(1 + \frac{b}{x_0}\right) = k(x - b)$$

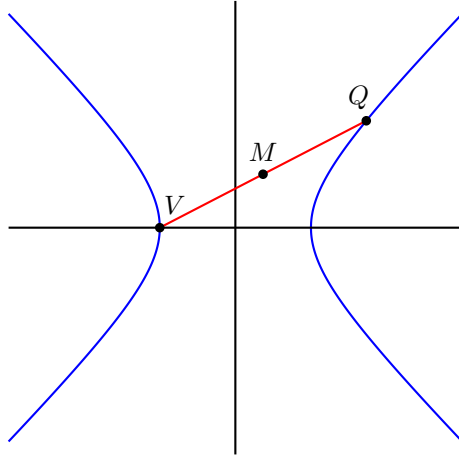
multiplicando la primera ecuación por b , la segunda por a y sumando

$$y(a + b) = bk(x - a) + ak(x - b)$$

que es la ecuación de una recta.

P7. Considere la ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Encuentre el lugar geométrico de los puntos medios de los trazos VQ , donde V es el vértice izquierdo de la hipérbola y Q un punto cualquiera de ella.

Solución



Sea $M = (x_M, y_M)$ el punto medio de los trazos VQ . Sea $Q = (x_Q, y_Q)$ un punto sobre la hipérbola y sea V el vértice izquierdo de la hipérbola, entonces $V = (-a, 0)$. M es el punto medio de los trazos VQ , luego $M = \frac{V+Q}{2}$, es decir

$$x_M = \frac{x_Q - a}{2}$$

$$y_M = \frac{y_Q}{2}$$

despejando x_Q e y_Q

$$x_Q = 2x_M + a$$

$$y_Q = 2y_M$$

dividiendo la primera por a y la segunda por b , elevando al cuadrado y restado las ecuaciones se obtiene:

$$\frac{x_Q^2}{a^2} - \frac{y_Q^2}{b^2} = \frac{(2x_M + a)^2}{a^2} + \frac{(2y_M)^2}{b^2}$$

pero Q es un punto sobre la hipérbola, luego satisface su ecuación y por lo tanto

$$\frac{x_Q^2}{a^2} - \frac{y_Q^2}{b^2} = 1 = \frac{(2x_M + a)^2}{a^2} + \frac{(2y_M)^2}{b^2}$$

de donde

$$\frac{(2x_M + a)^2}{a^2} + \frac{(2y_M)^2}{b^2} = 1$$

reescribiendo esta ecuación

$$\left(\frac{x_M - (-a)}{a/2} \right)^2 + \left(\frac{y_M}{b/2} \right)^2 = 1$$

que corresponde a la ecuación de una hipérbola de semiejes $a/2$ y $b/2$ y centro $(-a, 0)$. Por lo tanto el lugar geométrico es una hipérbola.