MA1001-2 Introducción al Cálculo
Profesora: Natacha Astromujoff
Auxiliar: Felipe Salas.

Auxiliar 11

Resumen:

1. $\lim \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$, $(\forall x \in \mathbb{R})$.
2. Desigualdad fundamental:
   - de la exponencial: $(\forall x \in \mathbb{R})\ e^x \geq 1+x$.
   - del logaritmo: $(\forall x > 0)\ \ln(x) \leq x-1$
3. Propiedades importantes:

   (I) Si $a_n \to a$, entonces:
   - $e^{a_n} \to e^a$.
   - $\frac{e^{a_n}-e^a}{a_n-a} \to e^a$.

   (II) Si $a_n \to a > 0$, entonces:
   - $\ln(a_n) \to \ln(a)$.
   - $\frac{\ln(a_n)-\ln(a)}{a_n-a} \to \frac{1}{a}$.

(**P**1) (a) Pruebe las siguientes proposiciones (importantes!):

(I) Si (a_n) es una sucesión, entonces:
$$a_n \to a \Leftrightarrow e^{a_n} \to e^a$$
(II) Si (a_n) es una sucesión tal que $a_n > 0$ partir de $n_0 \in \mathbb{N}$, entonces:
$$a_n \to a \Leftrightarrow \ln(a_n) \to \ln(a)$$

(b) Calcule (si existen) los siguientes límites

(I) $\lim \left(1+\frac{a_n}{n}\right)^n$, con $a_n \to L$.
(II) $\lim \left(1+\frac{2}{n^2}\right)^n$.
(III) $\lim \left(1+\frac{1}{n^2+1}\right)^{n^2+1}$.
(IV) $\lim \sqrt[n]{a}$, $a>0$.
(V) $\lim \sqrt{a_n}$, con $a_n \to L > 0$.

(**P**2) Demuestre que la sucesión (x_n) definida por $x_n = \frac{n^n}{n!e^n}$, es convergente.
Indicación: Recuerde que $s_n = (1+\frac{1}{n})^n$ *es creciente.*

(**P**3) Calcule los siguientes límites:

(I) $\lim n(\sqrt[n]{x}-1)$, $x>0$.
(II) $\lim \frac{n^{20}}{e^n}$.
(III) $\lim \frac{\ln(n)}{n}$.
(IV) $\lim \frac{\ln(1+e^n)}{n}$.
(V) $\lim \log_{1+\frac{1}{n}}(\sqrt[n]{e})$.
(VI) $\lim n[n^2(\sqrt[n^2]{e}-1)-1]$.