

MA1001-2 Introducción al Cálculo**Profesora:** Natacha Astromujoff**Auxiliar:** Felipe Salas.

Auxiliar 12

Resumen:**1. Definición de límite:**

Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, tal que se puede estudiar el límite en x_0 (x_0 es punto de acumulación de A), entonces:

(a) Definición por sucesiones:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow (\forall (x_n) \subseteq A)(x_n \neq x_0, x_n \rightarrow x_0) : f(x_n) \rightarrow l.$$

(b) Definición $\varepsilon - \delta$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in A \setminus \{x_0\}, |x - x_0| < \delta) : |f(x) - l| < \varepsilon.$$

2. Límites laterales: Se define el límite lateral por la derecha a x_0 como:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l \Leftrightarrow (\forall (x_n) \subseteq A)(x_n > x_0, x_n \rightarrow x_0) : f(x_n) \rightarrow l.$$

En palabras se toma el límite considerando cómo se ve la función por la derecha (análogamente se define el límite lateral por la izquierda a x_0). Luego se tiene que el límite de f en x_0 existe y vale l si los límites laterales valen l , es decir:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l.$$

3. Límites conocidos:

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

4. Composición de límites (importante!):

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ y $\lim_{x \rightarrow x_1} g(x) = x_0$, entonces $\lim_{x \rightarrow x_1} f(g(x)) = l$.

(P1) Usando la definición de límite demuestre que:

(I) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+x}{x+3} = \frac{1}{2}$ (usando $\varepsilon - \delta$).

(II) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ no existe.

Indicación: Tomarse las buenas sucesiones.

(III) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$ no existe.

(P2) Calcule los siguientes límites si existen:

(I) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

(IV) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{2 - \sqrt{x+1}}$.

(VII) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin[x]}{[x]}$.

(II) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\pi x)}{\sin(x^2)}$.

(V) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{\ln(x+1)}$.

(VIII) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin[x]}{[x]}$.

(III) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt[x]{a} - 1)$, $a > 0$.

(VI) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x}$.

(IX) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}$, $a, b > 0$.